

2021-2022 学年度第一学期伯苓班数分 3-3 期末 考试

回忆人: xyc

一 求下列级数的收敛区间:

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!};$

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})}.$

二 求下列函数在 $x = 0$ 处的幂级数展开和对应的收敛区间:

1 $\frac{x}{\sqrt{1-x}};$

2 $\arctan \frac{2x}{2-x^2}.$

三 根据 $\sin nx = n \int_0^x \cos nt dt$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 的值.

四 计算下列积分:

$$I(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$$

五 求下列极限:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2}$$

六 证明 Gamma 恒等式成立:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

(提示: n 倍角公式: $\sin n\theta = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$)