

20级数学分析II第1次月考试题

一、(本题15分) 计算定积分 $I = \int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$.

二、(本题30分)

(1) 求曲线 $y^2 = 2x + 1$ 与直线 $y = x - 1$ 所围成图形的面积.

(2) 求圆盘 $x^2 + (y - b)^2 \leq a^2$ ($0 < a < b$) 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积.

三、(本题15分) 设 $f(x) = \int_1^{x^2} \sin t^2 dt$. 求 $\int_0^1 xf(x) dx$.

四、(本题15分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负连续, 且存在正实数 A 和 B , 使得

$$f(x) \leq A + B \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

证明: $f(x) \leq Ae^{Bx}, \quad \forall x \in [0, 1]$.

五、(本题15分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上连续. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

六、(本题10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上两次连续可微且 $f(0) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in [-1, 1]$, 使得

$$f''(\xi) = 3 \int_{-1}^1 f(x) dx.$$