

2020-2021第二学期数论期末考试

命题人：王秀玲 回忆人：于飞洋

1. (10分) $n > 2$ 为正整数, 则 n 与 $n!$ 之间是否存在至少一个素数? 说明理由.
2. (10分) p 为奇素数, 证明: $1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$.
3. (10分) 解同余方程组 $2x \equiv 1 \pmod{5}, 3x \equiv 4 \pmod{7}$.
4. (10分) 求循环连分数 $[3, \dot{1}, \dot{1}, \dot{1}, \dot{1}, \dot{6}]$ 的值.
5. (10分) p 为奇素数, a 为正整数, 求 $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^a}$ 的解的个数.
6. (20分) 证明: 不定方程 $y^3 = x^2 + 4z$ 的正整数解仅有 $x = 11, y = 5, z = 1$.
7. (20分) 求二次域 $Q(\sqrt{3})$ 的全体单位与素元.
8. (10分) 定义 $S(m, n) = \sum_{h=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i h^2 m}{n}}$. 设 p 为奇素数, n 为正整数, 证明 $S(n, p) = \left(\frac{n}{p}\right) S(1, p)$.