数值分析 2013-2014 期末考试试题

一、(20 分)用顺序高斯消元法求解下列方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

并写出系数矩阵的 Doolittle 分解.

二、(15 分)设方程组$AX = b$的系数矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

试讨论解此方程组的 Jacobi 迭代方法和 Gauss-Seidel 迭代方法的收敛性.

三、(20 分)(1)设$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.求$A$的谱半径,$\|A\|_F$及$\|A\|_\infty$.(6 分)

(2)设$f(x) = x^3 + 1$. 求$f[2^0, 2^1], f[2^0, 2^1, 2^2, 2^3]$. (4 分)

(3)求一个次数不高于 3 的多项式$p_1(x)$,满足$p_1(1) = 2, , p_1(2) = 4, p_1(3) = 12, p_1'(x) = 4$.(化为最简形式) (10 分)

四、(25 分)(1)求多项式$f(x) = x^t$在区间$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式.(权函数$w(x) = 1$) (10 分)

(2)求函数$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$在区间 $[0,1]$上的一次最佳一次逼近多项式. (10 分)

(3)$\|A\|_F$为矩阵$A \in R^{n\times n}$的 Frobenius 范数, 证明: 对任意矩阵$A, B \in R^{n\times n}$, 有$\|AB\|_F \le \|A\|_F \|B\|_F$. (5 分)

五、(12 分)(1)在区间 $[-1,1]$上以$w(x) = |x|$为权函数的首项系数为 1 的正交多项式$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, 其中$\varphi_0(x) = 1$.

(2)利用(1)中的$\varphi_1(x)$构造 Guass 型求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)w(x)\,dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$并导出求积公式的系数表达式.