

2014-2015 学年伯苓班常微分方程期末试卷

1. 求解微分方程组 $\frac{dx}{dt} = Ax$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -20 \\ 5 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

2. 求解常系数线性微分方程： $x'' - 5x' + 6x = (12x - 7)e^x$

3. 求解微分方程： $e^x dx + y^2 dx + 2xydy = 0$

4. 求解微分方程： $t(t-x)\frac{dx}{dt} = x^2$

5. 设连续函数 $f(t, x)$ 关于 x 是递减的, 证明初值问题: $\frac{dx}{dt} = f(t, x), x(t_0) = x_0$ 在右侧 (即 $t \geq t_0$) 的解是唯一的

6. 设当 $a < t < b$ 时, n 阶线性微分方程 $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$ 中的 $f(t)$ 不恒为 0. 证明该方程有且至多有 $n + 1$ 个线性无关解

7. 设微分方程： $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$, 其中, $f(x, y)$ 在 \mathbf{R}^2 上连续有界, (x_0, y_0) 是平面上任一点, 证明: 上述方程的解可延伸到 $(-\infty, +\infty)$

8. 设 n 阶线性微分方程组 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$, 且存在周期 $T > 0$, 使 $A(t+T) = A(t)$, $\mathbf{f}(t+T) = \mathbf{f}(t)$, 证明: $x(t+T) = x(t), \forall t$, 当且仅当 $x(0) = x(T)$