

2015-2016 学年伯苓班数学物理方程期末考试

一.(15分) 设 Ω 为开集, $f \in D'(\Omega)$, 若有 Ω 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 且 $f|_{U_\alpha} = 0, \forall \alpha$. 证明: $f = 0$

二.(15分) 证明磨光核 $\varphi_\varepsilon(x)$ 的 $D'(R)$ 的极限为 $\delta(x)$

三.(15分) 设 $\varphi \in S, F$ 为 Fourier 变换, 证明:

$$(1). F(D^\alpha \varphi)(\xi) = \xi^\alpha F(\xi)$$

$$(2). F(x^\alpha \varphi)(\xi) = (-D_\xi)^\alpha F(\xi)$$

四.(15分) 若 u 是 Neumann 问题的解: $\Delta u = 0$ 于 Ω 中, $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = f$, 证明其所有解可表示为 $u + C$, 其中 C 为常数

五.(15分) 用 Fourier 方法求解以下初边值问题:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{tt} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

六.(15分) 利用能量积分 $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l k(x) u_x^2 + \rho(x) u_t^2 + q(x) u^2 dx$ 证明方程

$$\begin{cases} \rho(x) u_{tt} - (k(x) u_x)_x + q(x) u = f(x, t), 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \\ u(0, t) = i(t) \\ u(l, t) = j(t) \end{cases}$$

只有唯一解, 其中 $k(x) \geq k_0 > 0, q(x) \geq 0, \rho(x) \geq \rho_0 > 0$

七.(10分) 求解以下弦振动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = f_0(x) \\ u_t(x, 0) = f_1(x) \end{cases}$$