2015级常微分方程期末考试(数学类)

命题人:李明(回忆:张万鹏)

一、解方程$x^{(6)}+6x^{(4)}+9x''=0$.

二、解方程$x'=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

三、解方程$(t^2+1)x''+4tx'+2x=0$，已知有特解$x=\dfrac{1}{t^2+1}$.

四、解方程$x''+\dfrac{2}{1-x}(x')^2=0$.

五、设$y=\varphi(x)$是方程$y''+ay'+by=0$满足初值条件$y(0)=0$，$y'(0)=1$的解，证明：$y=\displaystyle\int_0^x \varphi(x-t)f(t)\mathrm{d}t$是方程$y''+ay'+by=f(x)$的解.

六、已知方程$x'=-xy^2+4x^3y^2$，$y'=-y+y^3$.
(1)利用$V(x,y)=x^2+y^2$判定方程零解的稳定性.
(2)判定解$x\equiv\dfrac{1}{2}$，$y\equiv 1$的稳定性.

七、设$\varPhi$是方程$x'=A(t)x$的基解矩阵.证明：
(1)若$A(t)$有周期T即$A(t+T)=A(t)$，则存在常数矩阵B使得$\varPhi(t+T)=\varPhi(t)B$.
(2)若存在常数矩阵B使得$\varPhi(t+T)=\varPhi(t)B$，则$A(t)$有周期T即$A(t+T)=A(t)$.

八、设$\varphi(x),\psi(x)$是方程$x''+p(t)x'+q(t)=0$的解，其中$\varphi(x)$满足$\varphi(a)=\varphi(b)=0$，且在(a,b)内恒不为0.证明：
(1)$\psi(x)$在$[a,b]$有零点.
(2)若$\psi(x)$在$[a,b]$有3个零点，则$\psi(x)\equiv 0$.