2017-2018 学年第一学期常微分方程期末考试

命题：李明

一、解以下方程：

（1）$\overrightarrow{X}'=A\cdot\overrightarrow{X}$，其中 A 为三阶矩阵，算得特征值为 0，i，-i。

（2）$\left(t^2+1\right)x''-2tx'+2x=0$，已知其一特解为 $x=t$。

（3）$x''+3x'+2x=\dfrac{1}{1+e^t}$

（4）$x'\cdot x'''-\left(x''\right)^2-x''=0$

二、给定微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=y-x\cdot f\left(x,y\right),\qquad \dfrac{dy}{dt}=-x-y\cdot f\left(x,y\right)$，

其中 $f\left(x,y\right)$ 有连续一阶偏导数。试证明在原点邻域内如 $f>0$ 则零解为渐近稳定的，而 $f<0$ 则零解不稳定。

三、已知三个列向量函数 $\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix}|t|^3+1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{X_2}=\begin{pmatrix}t^2+t\\0\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{X_3}=\begin{pmatrix}(t+1)^3\\1\\0\end{pmatrix}$。试证明：

（1）$\overrightarrow{X_1},\overrightarrow{X_2},\overrightarrow{X_3}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上线性相关，但在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上线性无关。

（2）不存在于 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上连续的矩阵 $A\left(t\right)$，使 $\overrightarrow{X_1},\overrightarrow{X_2},\overrightarrow{X_3}$ 同时为方程 $\overrightarrow{X}'=A\left(t\right)\cdot\overrightarrow{X}$ 的解。

四、（1）已知常系数 n 阶线性微分方程组 $\overrightarrow{X}'=A\cdot\overrightarrow{X}$，$\overrightarrow{p}\left(t\right)$ 是任意阶可导的列向量函数。若列向量函数 $e^{\lambda t}\cdot\overrightarrow{p}(t)$ 是此方程组的解，求证：对任意 k，$e^{\lambda t}\cdot\overrightarrow{p}^{(k)}(t)$ 也是方程组的解。

（2）已知常系数 n 阶线性微分方程组 $\overrightarrow{X}'=A\cdot\overrightarrow{X}+e^{\lambda t}\cdot\vec{q}(t)$，其中 λ 不是矩阵 A 的特征值，列向量函数 $\vec{q}(t)$ 的任一行都是次数不超过 m 的多项式。求证：此方程组有形如 $e^{\lambda t}\cdot\overrightarrow{p}(t)$ 的解，其中 $\overrightarrow{p}(t)$ 是列向量函数，且其中任一行都是次数不超过 m 的多项式。

五、已知方程 $x''(t)+p(t)x=0$。$p(t)$ 恒不大于零。【第二问记忆不清】

（1）若 $\varphi(t)$ 是原方程一解，且存在两不同零点 t_1,t_2。求证：$t\in\left[t_1,t_2\right]$ 时，$\varphi(t)\equiv0$。