数学科学学院 2015 级数理方程期末考试

命题人: 魏雅薇 (回忆: 张万鹏)

一、求解热传导方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,t) \quad t>0 \\ u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

二、用能量积分的方法证明以下波动方程 Cauchy 问题解的唯一性，其中 $n=2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta_2 u = f(x,t) \quad t>0 \\ u(x,t)|_{t=0} = g_0(x) \\ u_t(x,t)|_{t=0} = g_1(x) \end{cases}$$

三、用傅里叶方法求解弦振动方程的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad t>0 \\ u(x,t)|_{t=0} = g_0(x) \\ u_t(x,t)|_{t=0} = g_1(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

四、(1) 叙述并证明调和函数的极值原理；

(2) 利用极值原理证明以下 Dirichlet 问题的唯一性和稳定性

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad in\ \ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

五、证明 $L_{loc}(\Omega) \subset D^{'}(\Omega)$.

六、求算子 $P(D) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a, a \in \mathbb{R}$ 的基本解.

七、证明若 $f(x)$ 是急减函数，则 $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 其中 $1 < p < \infty$.