2019—2020 第一学期《常微分方程》期末考试

命题人：李明

一、　解方程（每题 15 分，共 60 分）

1. 求解微分方程组$\vec{y}'=\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}\vec{y}$（矩阵大致是这个吧，特征值是$4\pm i$）

2. 求解方程$y''+2y'+4y=e^{3x}(7x+4)$

3. 求解方程$x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0$，其中已知$x\cos x$是一特解

4. 求解方程$yy''-2(y')^2=0$

二、（10 分）设$y_1=\cos^2 x$，$y_2=\sin^2 x$，$y_3=|\cos 2x|$，求证y_1,y_2,y_3在区间

$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$和$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上线性相关，但在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上线性无关。

三、（10 分）判断非线性微分方程组

$$\begin{cases} x'=-\sin(x+y)\\ y'=\ -\ln(1+y)\end{cases}$$

零解的李雅普诺夫稳定性

四、（10 分）设$p(x),q(x),r(x),f(x)$都是区间$[0,1]$上的连续函数，考虑下面两个微分方程

$$y'''+p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0\quad (I)$$

$$y'''+p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=f(x)\quad (II)$$

设Φ,Ψ分别是方程(I) (II)的解

求证：方程(I)具有满足条件$\phi(0)=\phi\left(\frac{1}{2}\right)=\phi(1)=1$的唯一解当且仅当方程

(II)具有满足同样条件的唯一解

五、（10 分）设常数$p,q>0$，φ是下微分方程的一解：

$$y''+py'+qy=f(x)$$

（1）　若$f(x)\equiv 0$，求证$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$

（2） 若 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$，求证 $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)=0$

（这道题绝对回忆的有问题，但我实在忘了试卷怎么写的了，大概长这样吧，或许你们能够反推出原题）

（17 物理，雨濛回忆，如有纰漏，还请见谅）