2019—2020 第一学期《数理方程》期末考试

命题人：魏雅薇

一、（15 分）设$\tau(x,y,z)$是满足$-\Delta u=\delta$的基本解，已知u满足位势积分：

$$u=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\Delta u}{r}dx$$

试用格林函数表示方程$\begin{cases}-\Delta u=f\\ u\big|_{\partial\Omega}=g\end{cases}$的解（魏老师当时考的是二维的，但是我还是对三维的比较熟悉，所以我就写的三维的，二维就是变一下系数，没太大差别）

二、（15 分）试用能量积分法证明下二维波动方程解的唯一性：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta\right)u=f\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x,y)\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x,y)\\ u\big|_{\partial\Omega}=\mu(x,y,t)\end{cases}$$

三、（15 分）试用分离变量法求解一维波动方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=0\\ t=0\text{：}\ u=\varphi(x)\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}=\psi(x)\\ u(0,t)=0,u(l,t)=0\end{cases}$$

四、（15 分）求解热传导方程的柯西初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=f(x,t)\\ u(x,0)=\varphi(x)\qquad(-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

五、（15 分）利用傅里叶变换证明：

（1）$\widehat{f*g}=\hat{f}\cdot\hat{g}$

（2）$\widehat{f\cdot g}=(2\pi)^{-n}\hat{f}*\hat{g}$

六、（15 分）任一广义函数皆可用$C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$函数在D'意义下逼近

七、（10 分）证明$S(\mathbb{R}^n)\subset L^p(\mathbb{R}^n)\subset S'(\mathbb{R}^n)\quad(1<p<+\infty)$

（此题疑似祖传压轴题）

（17 物理，雨濛回忆，如有纰漏，还请见谅。魏老师还是很善良的，基本都是课本的推导或者稍微有所变动。不要像我考试前看了三个小时就去考，就基本上都很高吧）