2013年"数理统计"期中考试试题

姓名：　　　　　　学号：　　　　　　分数：

注意事项：

1. **本试卷共两个大题（14个小题），全卷满分100分；**
2. **用圆珠笔或钢笔作答；**
3. **证明或解答题请写出详细的证明或解答过程.**

一、填空题(7个小题，每空2分，共24分)

(1) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自指数分布$E(\lambda)$的IID样本. 则$\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(a,b)$，其中$(a,b)$=(____________).

(2) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自$N(\mu,\sigma^2)$的iid样本. 当μ已知时，σ^2的UMVUE是：________________；当μ未知时，σ^2的UMVUE是：________________. 两个UMVUE的方差分别是____________和____________.

(3) 分布$\chi^2(n)$的PDF为________________、特征函数为________________.

(4) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自总体分布为F的iid样本，则最大次序统计量的概率分布为____________.

(5) Piossin分布$P(\lambda)$服从指数型分布族，其典则形式为：____________.

(6) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为一组来自正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的iid样本，则e^{μ}的MLE为________.

(7) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自总体分布为$F(x)$的iid样本，经验分布函数为$F_n(x)$，则对于任给的x, $E[F_n(x)]$=________、$\mathrm{Var}[F_n(x)]$=________________.

二、解答或证明题（7个小题，共76分）

(8) (10分)设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自多项总体$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{pmatrix}$的IID样本，其中$0 < p_i < 1, \sum_{i=1}^r p_i = 1$. 试求$p_i$的MLE(只写出结果不给分).

(9) (12分) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自指数分布$E(\lambda)$的iid样本，记$T=\sum_{i=1}^n X_i$.

(a) 验证T为充分完备统计量.

(b) 求总体期望$1/\lambda$的UMVUE.

(c) 验证上述UMVUE是否为有效估计.

(10) (10分)设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自指数分布$E(\lambda)$的iid样本，对于给定的时刻$t>0$，定义$p_\lambda(t)=P\{X_1 \le t\}$.

(a) 求$p_\lambda(t)$的MLE $\hat{T}$；

(b) 证明$\hat{T}$是$p_\lambda(t)$的相合估计.

(11) (12分)设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自均匀分布$U(0,\theta)$的iid样本.

(a) 求θ的矩估计$\hat{\theta}_m$和MLE $\hat{\theta}_{ML}$;

(b) 从MSE角度比较$\hat{\theta}_M$和$\hat{\theta}_{ML}$的优劣;

(c) 求θ的UMVUE.

(12) (12分)设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自正态分布$N(\mu,1)$的iid样本，则$P\{X_1 \geq 0\} = \Phi(\mu)$.

(a) 证明$\bar{X}$是充分完备的；

(b) 构造一个$\Phi(\mu)$的UE；

(c) 求$\Phi(\mu)$的UMVUE.

(13) (10分) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自均匀分布$U(0,1)$的iid样本，记$R = X_{(n)} - X_{(1)}$为其极差，求R的PDF，并证明：当$n \to \infty$时, $2n(1-R) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(4)$. (提示：$X_{(1)}, X_{(n)}$的联合PDF为$f(x,y) = \begin{cases} n(n-1)(y-x)^{n-2}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$)

(14) (10分)设$X = (X_1, \ldots, X_n)$服从n-正态分布$(N(\mu\mathbf{1}, \mathbf{\Sigma})$, $\Sigma = \sigma^2[(1-\rho)I + \rho\mathbf{1}\mathbf{1}']$, 其中$|\rho| < 1$, I为单位阵, $\mathbf{1}$为分量均为1的n元列向量. 记$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, W = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. 证明：$\bar{X}$与$W$独立.