数学科学学院本科生2013 — 2014学年第一学期《数理统计》期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师:　　专业:　　年级:　　学号:　　姓名:　　成绩:

得 分

一、填空题(本题共22分, 每空2分).

(i). 设$X_1,\dots,X_n$为来自$N(\mu,\sigma^2)$iid样本，则参数e^{μ}的MLE为_________.

(ii). 自t分布与F分布间的关系为：____________；当$n\to\infty$时, $F(m,n)$的极限分布形式为：____________.

(iii). 设$\phi(x)$为关于假设$H_0:\theta\le\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$的水平$\alpha$的UMPT，则它的两个最优性为：

__________________和__________________.

(iv). 设$X_1,\dots,X_n$为来自正态分布$N(\mu,1)$的iid样本，则关于假设$H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1:\mu\ne 0$的水平

为α的UMPU检验为$\phi(x)=\begin{cases}1, & \underline{\qquad\qquad}\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$ 它等同于正态总体显著性检验中的_____检验.

(v). 设$X_1,\dots,X_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的iid样本(σ^2未知)，则参数μ 的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

_______________________, 它等同于单样本正态总体显著性检验中的_____检验.

(vi). 设$X_1,\dots,X_n$为来自$N(0,\sigma^2)$的iid样本，则σ的UE的方差下界为：____________.

(vii). 对于一维参数θ, 以$I(\theta)$记总体的Fisher信息量，则在一定条件下，基于n个iid样本的θ的MLE $\hat\theta_n$的

极限分布形式为：____________________.

得 分

二、(12分)设$X_1,\dots,X_{n+1}$为来自$N(\mu,\sigma^2)$的iid样本，记$\bar X_k=\sum_{i=1}^k X_i/k, S_k^2=\sum_{i=1}^k(X_i-\bar X_k)^2/(k-1)$. 证明：存在常数$c$，使$c(X_{n+1}-\bar X_n)/S_n$的抽样分布为$t$分布，并求常数$c$.

草 稿 区

得 分

三、 (14分)设样本$X_1,\ldots,X_n$相互独立，且$X_i \sim N(i\mu,1)$. 求μ的UMVUE及水平$1-\alpha$的置信区间.

草 稿 区

得 分

四、(12分) 设$X_1,\ldots,X_m$为来自$N(\mu_1,\sigma^2)$的iid样本，$Y_1,\ldots,Y_n$为来自$N(\mu_2,4\sigma^2)$的iid样本(σ^2未知)，且全样本独立.

(i). 基于全样本，给出σ^2一个好的点估计；

(ii). 求$H_0:\mu_1=\mu_2\leftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2$的水平为$\alpha$的显著性检验.

草 稿 区

得 分

五、(13分)设$X_1,\ldots,X_n$为来自具有如下PDF $f(x,\mu)=\exp\{-(x-\mu)\}I_{\{x\geq\mu\}}$的总体的IID样本，其中$\mu\in R$为参数，感兴趣的假设为 $H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1:\mu\neq 0$.

(i). 求统计量$2nX_{(1)}$的精确零分布；

(ii). 求假设$H_0\leftrightarrow H_1$的水平α的似然比检验；

(iii). 求统计量$nX_{(1)}$的极限零分布.

草 稿 区

得 分

六、(10分)对于如下两个假设

$$H_0:\theta\in\Theta_0\leftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1,\quad 与\quad H_{01}:\theta\in\Theta_{01}\leftrightarrow H_1:\theta\in\Theta,$$

其中$\Theta_{01}\subset\Theta_0$. 证明：如果$\phi(x)$是假设$H_0\leftrightarrow H_1$的水平$\alpha$的检验，且是假设$H_{01}\leftrightarrow H_1$的UMPT，则$\phi(x)$也是假设$H_0\leftrightarrow H_1$的水平$\alpha$的UMPT.

得 分

七、(12分) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自总体PDF为$f(x,\theta)=\theta x^{\theta-1}I_{(0,1)}(x)$的iid样本，其中$\theta>0$为未知参数.

(i). 求$-\log X_1$的分布;

(ii). 求关于假设 $H_0:\theta\le\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$的水平为$\alpha$的UMPT, 其中$\theta_0>0$已知.

草 稿 区

得 分

八、(5分) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自$N(0,1)$的iid样本, 定义：$U=\sum_{i=1}^n X_i^2, V_i=X_i^2/U, i=1,2,\cdots,n$.
证明： U与$(V_1,\ldots,V_n)$独立.