2014年"数理统计"期中考试试题

姓名：　　　　　　　　学号：　　　　　　　　分数：

一、填空题(6个小题，每空2分，共20分)

(1) 设随机变量$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$，则对于给定的正常数$c$，$cX \sim$___________，$E(X)=$ ___________.

(2) 对于给定的$\alpha > 0$，且$m \neq n$，则$F(m,n)$的上侧α分位数与$F(n,m)$的上侧分位数间的关系为：____________________________.

(3) 分布$\Gamma(\alpha, \lambda)$的PDF为______________________、特征函数为______________________.

(4) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自正态总体$N(0, \sigma^2)$的iid样本，则关于σ^2的UE的方差下界为：___________，σ^2的UMVUE为________________

(5) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为一组来自正态分布$N(\mu, \sigma^2)$的iid样本，则$\frac{\mu}{\sigma^2}$的MLE为___________.

(6) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自总体分布为$F(x)$的iid样本，经验分布函数为$F_n(x)$，则对于任给的x, $E[F_n(x)]=$___________、$\mathrm{Var}[F_n(x)]=$______________________.

二、解答或证明题（7个小题，共80分）

(7) (12分)设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自均匀分布$U(0, \theta)$的iid样本，其中$\theta > 0$为未知参数.

(a) 求θ的MLE；

(b) 验证上述MLE为充分完备统计量，并求θ的UMVUE.

(8) (10分) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自指数分布$E(\lambda)$，即$\Gamma(\lambda, 1)$的iid样本，求$1/\lambda$的水平为$1-\alpha$的置信下限.

(9) (12分)设$X_1, X_2, \cdots, X_m$为来自$N(\mu, \sigma_1^2)$的iid样本，$Y_1, \ldots, Y_n$为来自$N(\mu, \sigma_2^2)$的iid样本，且全样本独立，其中σ_1^2, σ_2^2均已知. 求μ的UMVUE及水平$1-\alpha$的置信区间.

(10) (12分)设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自PDF为$f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1} (0 < x < 1)$的iid样本，其中$\theta > 0$. 令$T(\mathbf{X}) = -\sum_{i=1}^n \log(X_i)/n$. 求$-\log(X_1)$的PDF，并证明$T$是$1/\theta$的有效估计.

(11) (12分)称随机变量X的分布关于μ对称，如果其PDF $f(x)$满足：$f(\mu + x) = f(\mu - x)$. 证明：

(a) 如X的分布关于μ对称，则$E(X) = \mu$；

(b) 如$X_1, \cdots, X_n$为来自某对称总体的iid样本，且总体三阶矩存在有限，则其样本均值与样本方差不相关.

(12) (12分) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自Pareto分布的iid样本. 记$T(X) = \prod_{i=1}^n X_i$. 证明：$2\alpha(\log T - n\log\theta) \sim \chi^2(2n)$. (Pareto分布的PDF为：$\alpha\theta^\alpha x^{-(\alpha+1)} I_{\{x \geq \theta\}}$.)

(13) (10分)设$X_1, \ldots, X_n$为来自总体X的iid样本，且$E(X^2)$存在，则证明：$\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n iX_i$是$E(X)$的相合估计.