2015-2016 学年第一学期伯苓班概率论期末考试

一. 设事件空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)=\dfrac{1}{3}$,$\xi,\eta,\gamma$ 为随机变量, 且:

$$\xi(\omega_1)=1,\xi(\omega_2)=2,\xi(\omega_3)=3$$

$$\eta(\omega_1)=2,\eta(\omega_2)=3,\eta(\omega_3)=1$$

$$\gamma(\omega_1)=3,\gamma(\omega_2)=1,\gamma(\omega_3)=2$$

(1). 求证:ξ,η,γ 同分布

(2). 求 $\sqrt{(\xi^2+\eta^2)\gamma}$ 的概率分布

二. 事件 A 的示性函数 $I_A(\omega)=\begin{cases}1,\omega\in A\\0,\omega\notin A\end{cases}$ 为随机变量, 证明: 事件列 $\{A_k\}_{k=1}^n$ 相互独立的充分必要条件为其对应的随机变量列 $\{I_{A_k}\}_{k=1}^n$ 相互独立

三. 随机变量 ξ 服从标准正态分布, 证明:ξ 与 $|\xi|$ 不相关, 不独立

四. 随机变量 ξ,η 独立同分布于 $E(1)$, 求 $|\xi-\eta|$ 的概率密度函数

五. 随机变量列 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ 独立,$E(\xi_n)=0,D(\xi_n)=\sigma_n^2,\sum\limits_{k=1}^\infty\sigma_k^2<\infty$, 求证:$\sum\limits_{k=1}^\infty\xi_k$ 几乎处处收敛

六. 证明随机变量列 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ 满足大数定律的充分必要条件为

$$E\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^n(\xi_k-E(\xi_k))^2}{n^2+\left(\sum\limits_{k=1}^n(\xi_k-E(\xi_k))^2\right)}\right)\to 0$$