数学科学学院本科生2015 — 2016学年第一学期《数理统计》期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师: **专业:** **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、填空题(本题共22分, 每空2分).

(i). 设$X_1,...,X_n$为来自$N(\mu,\sigma^2)$的iid样本，则参数e^μ的MLE为__________.

(ii). 设$X \sim \Gamma(\alpha,\lambda), Y \sim \Gamma(\beta,\lambda)$, 且$X,Y$独立，则$X+Y \sim$____________；$X$的PDF为：__________________.

(iii). 设$\phi(x)$为关于假设$H_0:\theta\le\theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$的水平$\alpha$的UMPT，则它在检验类$\Phi^*$={ __________________}中第_____类错误概率最小.

(iv). 设$X_1,...,X_n$为来自正态分布$N(\mu,1)$的iid样本，则关于假设$H_0:\mu\le 0 \leftrightarrow H_1:\mu>0$的水平为$\alpha$的UMP检验为$\phi(x)=\begin{cases} 1, & \underline{\qquad\qquad}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$ 它等同于正态总体显著性检验中的_____检验.

(v). 设$X_1,...,X_n$为来自CDF为$F(x)$的iid样本，以$F_n(x)$记其经验分布函数，则$F_n(x)$=____________________.
则关于假设$H_0:F(x)=F_0(x) \leftrightarrow H_1:F(x)\ne F_0(x)$(其中$F_0(x)$完全已知)的Kolmogorov检验统计量为: ________________________. 如对于给定的正整数r，将样本空间划分成r 个不交区间，且以n_i, p_i, p_{i0}分别表示落入第i个区间的样本个数、理论概率和期望概率, 则检验上述假设的χ^2拟合优度检验统计量为：________________________, 其极限零分布为：________________________.

草 稿 区

得 分

二、(10分)设$X_1,\dots,X_n$为来自指数分布$E(1)$的iid样本，记$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$为其次序统计量，$X_{(0)}=0$, $Z_i=X_{(i)}-X_{(i-1)}, i=1,\dots,n$ (注：$(X_{(1)},\dots,X_{(n)})$的联合PDF为$f(x)=n!\exp\{-\sum_{i=1}^n x_i\}I(1<x_1<\cdots<x_n)$). 证明：

(i). $Z_1,\dots,Z_n$相互独立且$2(n-i+1)Z_i\sim\chi^2(2)$;

(ii). $2[\sum_{i=1}^r X_{(i)}+(n-r)X_{(r)}]\sim\chi^2(2r)$, $r=1,\dots,n$.

草 稿 区

得 分

三、(12分)设$X_1,\ldots,X_n$为来自$N(\mu,\sigma^2)$的iid样本，μ,σ^2均未知.

(i). 求μ^2的UMVUE, 并记之为$T_n(X)$；

(ii). 验证上述$T_n(X)$是否为μ^2的有效估计;

(iii). 验证上述$T_n(X)$是否为μ^2的相合估计.

草 稿 区

得 分

四、 (10分)设样本$X_1, \ldots, X_m$为来自$N(\mu, \sigma_1^2)$的iid样本, $Y_1, \ldots, Y_n$为来自$N(\mu, \sigma_2^2)$的iid样本，且全样本独立，其中$\mu, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 为未知参数. 求μ水平$1-\alpha$ 的置信区间.

草 稿 区

得 分

五、(10分)设$X_1,\ldots,X_n$为来自具有如下PDF $f(x,\mu)=\exp\{-(x-\mu)\}I_{\{x\geq\mu\}}$的总体的IID样本，其中$\mu\in R$为参数，求假设$H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1:\mu\neq 0$的水平$\alpha$的似然比检验.

草 稿 区

得 分

六、(12分) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的iid样本.

(1) 当$\sigma^2 = 1$时, 求假设$H_0 : \mu \leq 0 \longleftrightarrow H_1 : \mu > 0$的水平为$\alpha$的显著性检验, 并证明其功效函数$\beta(\mu)$关于$\mu$单调增加;(8分)

(2) 当μ未知时, 求假设$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$的水平为$\alpha$的显著性检验.

.

草 稿 区

得 分

七、(12分) 设$X_1, \ldots, X_n$为来自概率分布为$f(x,\theta)$的iid样本, 其中$\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, 我们感兴趣的假设为$H_0: \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta = \theta_1$. 设检验$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \lambda(X) > k; \\ 0, & \lambda(X) < k, \end{cases}$ 其中非负数k满足$\beta_\phi(\theta_0) = \alpha \in (0,1)$, $\lambda(X) = f(X,\theta_1)/f(X,\theta_0)$为似然比. 证明上述$\phi(X)$为水平$\alpha$的MPT, 且$\beta_\phi(\theta_1) \geq \alpha$.

草 稿 区

得 分

八、(12分) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自指数分布$E(\lambda)$的iid样本，其中$\lambda>0$为未知参数. 求假设 $H_0:\lambda=1\longleftrightarrow H_1:\lambda\neq 1$ 的水平为α的UMPUT.