数学科学学院本科生2016 — 2017学年第一学期《数理统计》期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师: 专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

得 分

一、填空题(本题共20分, 每空2分).

(i). 设$X_1,\dots,X_n$为来自$N(0,\sigma^2)$的iid样本，则参数σ^2的UMVUE为__________.

(ii). 设$X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$, 则$X$的PDF及特征函数分别为____________________与________________.

(iii). Poisson分布$P(\lambda)$的典则形式为：____________________.

(iv). 设$X\sim F(1,n)$, $Y\sim t(n)$，则X与Y之间的关系为：____________.

(v). 设$X_1,\dots,X_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的iid样本，$S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$. 则$\mathrm{Var}(S_n^2)$=____________.

(vi). 设$X_1,\dots,X_n$为来自正态分布$N(\mu,1)$的iid样本，则关于假设$H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1:\mu\neq 0$的水平

为α的UMPU检验为$\phi(x)=\begin{cases}1, & __________, \\ 0, & \text{否则},\end{cases}$ 它等同于正态总体显著性检验中的_____检验. μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为：(______________________________).

(vii). 检验没有未知参数的$r\times s$列联表行列独立的χ^2拟合优度检验为：$\phi(x)=\begin{cases}1, & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$

得 分

二、 (10分)设某产品寿命$X\sim E(\lambda)$. 基于n个独立观测$X_1,\dots,X_n$, 求产品平均寿命水平$1-\alpha$的置信限.

草 稿 区

得 分

三、(10分)设分布族$\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$是C-R正则分布族，$g(\theta)$是$\Theta$上的可导函数，假如$T(\mathbf{X})$是$g(\theta)$的任一估计，且满足$\frac{\partial}{\partial\theta}\int T(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta)d\mathbf{x}=\int T(\mathbf{x})\frac{\partial f(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta}d\mathbf{x}$. 证明：

$$E_\theta[T(\mathbf{X})-g(\theta)]^2\geq B^2(\theta)+\frac{[g'(\theta)+B'(\theta)]^2}{nI(\theta)},$$

其中$B(\theta)=E_\theta T(\mathbf{X})-g(\theta)$(注意到样本$\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$为IID的).

草 稿 区

得 分

四、(10分) 设$X_1,\dots,X_n$为来自均匀分布$U(0,\theta)$的iid样本，其中$\theta > 0$为未知参数. 证明$X_{(n)}$为θ的相合估计.

草 稿 区

得 分

五、(20分)设$X_1, X_2, \cdots, X_m$为来自正态分布$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的iid样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为来自正态分布$N(\mu_2, \sigma^2)$的iid样本，且全样本$X_1, \cdots, Y_n$相互独立，$\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma^2$ 均未知，但$\sigma_1^2/\sigma^2 = c$已知.

(1) 求μ_1的有效估计；

(2) 求σ^2的MLE;

(3) 求$\mu_1 - \mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间;

(4) 当σ_1^2与σ^2没有约束时，求$H_0: \sigma_1^2 = \sigma^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma^2$的水平$\alpha$的显著性检验.

草 稿 区

草 稿 区

得 分

六、(8分)设$X_1, \ldots, X_{n+1}$为来自$N(\mu, \sigma^2)$的iid样本，记$S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.
证明：$\frac{S_{n+1}^2 - S_n^2}{S_n^2/(n-1)} \sim F(1, n-1)$.

草 稿 区

得 分

七、(10分) 设$X_1,\ldots,X_n$相互独立，且$X_1 \sim N(\theta,\sigma^2)$, $X_j \sim N(0,\sigma^2), j=2,3,\cdots,n$. 求假设$H_0:\theta=0 \longleftrightarrow H_1:\theta\neq 0$的水平$\alpha$的似然比检验.

得 分

八、(12分) 设$X_1,\ldots,X_n$为来自总体PDF为$f(x,\theta)=\exp\{-(x-\theta)\}I_{(X>\theta)}$的iid样本.

(1) 验证此分布族为关于$X_{(1)}$单增的似然比分布族;

(2) 求假设$H_0:\theta\le 0 \longleftrightarrow H_1:\theta>0$的水平为$\alpha$的UMPT.

.

草 稿 区