2019—2020 第一学期随机过程期末考试

命题人：王龙敏

一、（1）叙述马尔可夫链不变测度与平稳分布的定义

（2）设X_n是Z上的随机游走，满足$p(x,x-1)=p$，$p(x,x+1)=1-p$，求X_n的不变测度

（20 分）

二、设X_n满足$\Sigma=\{1,2......N\}$上的均匀分布，记

$$T_N=inf\{n:\{X_1,...X_n\}=\{1,2...N\}\}$$

求证$\dfrac{T_N}{N\ln N}$依概率收敛到1

（20 分）

三、常数$\alpha_k,\beta_k,\gamma_k,k\geqslant 0$满足$\beta_0=0$，$\beta_0+\gamma_0=1$，对任意的$k\geqslant 1$，$\alpha_k>0$，$\beta_k>0$，$\alpha_k+\beta_k+\gamma_k=1$，设离散时间马氏链$X_n$状态空间为$\{0,1...\}$，转移概率为：

$$p(0,0)=\gamma_0,p(0,1)=\beta_0,p(k,k)=\gamma_k,p(k,k-1)=\alpha_k,p(k,k+1)=\beta_k,k\geqslant 1$$

设$a<k<b$，记$\tau_k=inf\{n:X_n=k\}$，$\varphi(m)=\sum_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j}{\beta_j}$，求证：

（1）$P_k(\tau_a<\tau_b)=\dfrac{\varphi(b)-\varphi(k)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$

（2）X_n常返当且仅当$\lim\limits_{m\to\infty}\varphi(m)=\infty$

（20 分）

四、设$(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$是鞅或者非负下鞅，证明存在常数$C>0$，使得：

$$E\left[\sup_n|X_n|\right]\leqslant C\left(1+\sup_n E[|X_n|\ln_+|X_n|]\right)$$

其中$\ln_+(x)=\max\{\ln\ x,0\}$

（20 分）

五、设ξ_n服从标准正态分布，求证：

$$\lim_{n\to\infty} sup\frac{\xi_n}{\sqrt{2\ln\ n}}=1\quad a.s.$$

（真是气死了，我就不应该回忆这该死的考题，回忆时才发现是以概率 1 收敛，不是依概率收敛）
（10 分）

六、设$\xi_1,\xi_2...$独立同分布，满足$P\{\xi_n=1\}=P\{\xi_n=-1\}=\frac{1}{2}$，记:

$$X_n=a\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{\xi_k=1\}}-b\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{\xi_k=-1\}}$$

$a>0,b>0$，记$\varphi(s)=\ln\left(\frac{1}{2}e^{sa}+\frac{1}{2}e^{sb}\right)$，$s\in R$，记$M_n=\exp(sX_n-n\varphi(s))$

$\tau=inf\{n{:}X_n\leqslant-r,r>0\}$

求证：

（1）M_n是鞅

（2）证明当$\lambda\leqslant\frac{b}{a+b}\ln\frac{2b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\ln\frac{2a}{a+b}$时，$E[e^{s\tau}]<\infty$

（10 分）
（此题极有可能记忆有误，尤其是那个常数，当时第二问只做了一半，所以没用心记。）

注：随机过程建议学完数分高代实变泛函概率论复变（差不多五毒俱全）的时候再选，要不然真的会很痛苦，毕竟随机过程随机过吗。

（ 17 物理 雨濛整理）