数学科学学院2020级数学伯苓班动态进出《数学分析3-3》考试

任课教师: **专业:** **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

草 稿 区

得 分

一、(10分) 设函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p + n^q x^2}$$

在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛. 求p, q 的取值范围, 并说明理由.

草 稿 区

得 分

二、(10分) 已知$a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$, $n = 1, 2, \ldots$ 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

收敛.

草 稿 区

得 分

三、(15分) 对 p 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{n^p}$$

的收敛性, 其中 $p > 0$.

草 稿 区

得 分

四、(15分) 计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta}\ ,$$

其中$0 \le b < a$.

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数 $a_0 = 1, a_1 = -7, a_2 = -1, a_3 = -43$ 并满足关系式

$$a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_2 a_n = 0 \qquad (n \geq 0),$$

其中 c_1, c_2 为常数. 求a_n的一般表达式，级数的收敛半径以及级数和.

草 稿 区

得 分

六、(15分)设f为$[-\pi,\pi]$上连续函数, 满足$f(-\pi)=f(\pi)$. 令

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-x)}dx,$$

其中$0\le r<1$, $\theta\in[-\pi,\pi)$. 证明: 对于任意的$\theta_0\in[-\pi,\pi)$,

$$\lim_{r\to1,\theta\to\theta_0}u(r,\theta)=f(\theta_0).$$

草 稿 区

得 分

七、(15分)设$\mathbb{R}^3$上连续函数u具有两阶连续偏导数, 且不恒为常数. 满足

$$\Delta u + u^5 = 0,\ \text{其中} - \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

取$\lambda > 0$, 令$u_\lambda(x,y,z) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, 其中 α 为正常数, 使得

$$\Delta u_\lambda + u_\lambda^5 = 0.$$

(i). 求 α.

(ii). 若$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x,y,z)|^2 dxdydz$ 收敛, 证明对于任意$\lambda > 0$,

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x,y,z)|^2 dxdydz = \int\int\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_\lambda(x,y,z)|^2 dxdydz.$$

(iii). D是具有光滑边界∂D的有界区域, 且$u|_{\partial D} = 0$, 证明

$$\int\int\int_D |u(x,y,z)|^6 dxdydz = \int\int\int_D |\nabla u_\lambda(x,y,z)|^2 dxdydz.$$

草 稿 区

得 分

八、(10分) 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2h} & 0 \le |x| \le 2h \\ 0 & 2h \le |x| \le \pi, \end{cases} \tag{1}$$

其中$h > 0$. 利用$f(x)$的Fourier级数方法计算下列级数和：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 nh}{n^4}$