

2021-2022 代数拓扑期末考试

郑弃冰

左岸孤单人，斯文帅中年

2022 年 4 月 24 日

一 (44 = 22 × 2) 判断下述命题的正确性.

本题基本是在老师给的期末复习题中抽取，如下所示：

1. $(\tilde{C}(X) \times \tilde{C}(Y), (X \times \tilde{C}(Y)) \cup (\tilde{C}(X) \times Y)) \cong (\tilde{C}(X * Y), X * Y)$
2. $(D^m \times D^n, (S^{m-1} \times D^n) \cup (D^m \times S^{n-1})) \cong (D^{m+n}, S^{m+n-1})$
3. $(S^m \times D^{n+1}) \cup (D^{m+1} \times S^n) \cong S^m * S^n$
4. $(\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y) \cong \partial(X \times Y)$
5. $(S^m \times D^{n+1}) \cup (D^{m+1} \times S^n) \cong S^{m+n+1}$
6. $S^m * S^n \cong S^{m+n+1}$
7. $(X \sqcup Y)^* \cong X^* \vee Y^*$
8. $(\mathbb{R}^m \sqcup \mathbb{R}^n)^* \cong S^m \vee S^n$
9. $(X \times Y)^* \cong X^* \wedge Y^*$
10. $S^m \wedge S^n \cong S^{m+n}$
11. $(X * Y) \setminus X \simeq Y$
12. $S^{m+n+1} \setminus S^m \simeq S^n$
13. $(X * Y) \setminus (X \sqcup Y) \cong X \times Y \times (0, 1)$
14. $(X * Y) \setminus (X \sqcup Y) \simeq X \times Y$
15. $S^{m+n+1} \setminus ((S^m, 0) \cup (0, S^n)) \simeq S^m \times S^n$
16. $(X * Y) \setminus (\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y) \simeq X \sqcup Y$
17. $S^{m+n+1} \setminus \frac{1}{\sqrt{2}}(S^m, S^n) \simeq S^m \sqcup S^n$
18. $f : X \rightarrow Y, \tilde{C}_f \setminus [0, X] \simeq Y$
19. $(S^m \times S^n) \setminus * \simeq S^m \vee S^n$
20. $\mathbb{R}P^{n+1} \setminus * \simeq \mathbb{R}P^n$
21. $S(l_1 \cdots l_n) \setminus 0 \simeq \vee_n S^1$
22. $\mathbb{T}(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_g) \setminus * \simeq \mathbb{T}(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_{g-1}) *$ 为 r_g 对应锥的顶点

23. 已知 $f: X \rightarrow Y$ 零伦, $\tilde{C}_f \simeq \tilde{S}(X) \vee Y$
24. $f: S^m \rightarrow S^{m+n} (n > 0), \tilde{C}_f \simeq S^{m+1} \vee S^{m+n}$
25. $D^m \cup S^{m+n} \simeq S^m \vee S^{m+n} (n > 0)$
26. $(S^m \times S^n)/S^m \simeq S^{m+n} \vee S^n$
27. A 为 X 非退化子空间, $X \cup CA \simeq X/A$
28. $S^{m+n}/S^m \simeq S^{m+1} \vee S^{m+n} (n > 0)$
29. K 为紧 T_2 空间 X 的非退化紧子空间, $(X \setminus K)^* \simeq X/K$
30. $((S^m \times S^n) \setminus (0, S^n))^* \simeq S^{m+n} \vee S^m$
31. K 为 S^n 的非退化紧子空间, $(S^n \setminus K)^* \simeq S^n \vee \tilde{S}(K)$
32. $(S^{m+n} \setminus S^n)^* \simeq S^{m+1} \vee S^{m+n} (n > 0)$
33. K 为局部紧 T_2 空间 X 的非退化闭子空间, $(X \setminus K)^* \simeq X^*/K^*$
34. $(\mathbb{R}^{m+n} \setminus \mathbb{R}^n)^* \simeq S^{m+1} \vee S^{m+n} (n > 0)$
35. K 为局部紧 T_2 空间 X 的非退化紧子空间, $(X \setminus K)^* \simeq X^*/K^*$
36. $(\mathbb{R}^{m+n} \setminus S^m)^* \simeq S^1 \vee S^{m+1} \vee S^{m+n} (n > 0)$
37. $f: X \rightarrow S^n (n > 0) \Rightarrow f$ 零伦
38. $[S^m; S^{m+n}] (m, n > 0)$ 群结构仅有一种
39. $\deg(S^n \xrightarrow{\cong} S^n) = \pm 1$
40. 可逆线性变换 $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ 扩张到一点紧化空间 $S^n = (\mathbb{R}^n)^*$ 上的 \tilde{A} , $\deg(\tilde{A}) = \pm 1$
41. $A \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$ 作用在 $S^{n-1} (n > 1)$ 上 $\deg(A) = 1$
42. 将 S^n 坐标按置换 $\sigma \in S_{n+1}$ 重新排列的映射之映射度为 $\text{sgn}(\sigma)$
43. $f: S^n \rightarrow S^n, \tilde{C}_f$ 同伦于某一 $T_n(x; kx) (k \in \mathbb{Z})$
44. $\pi_n(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_n(X, x) \times \pi_n(Y, y)$
45. $\pi_n(S^1 \times S^1, (*, *)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
46. 射影平面、Klein 瓶是 $S^1 \times S^1$ 的覆盖空间
47. 紧空间 B 的覆盖空间 E 仍是紧的 $\Leftrightarrow \pi_1(B)$ 关于子群 $\pi_1(E)$ 的右陪集有限
48. 基本群有限的紧空间之任何覆盖空间仍是紧的
49. $(n-1)$ -连通的 $(n+1)$ 维 CW 复形同伦于某一 $T_n(S; \{r_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda})$
50. $T(x_1, x_2, x_3, y; yx_1^3x_2^{-1}x_3^5) \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1$
51. $T(x_1, x_2, x_3; x_1x_2x_3, x_1x_2x_3x_1x_2x_3) \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^2$
52. $T(x; x^4) \simeq T(x; x^2) \vee T(x; x^3)$

53. $T_n(x_1, x_2, x_3, y; y + 3x_1 - x_2 + 5x_3) \simeq S^{n-1} \vee S^{n-1} \vee S^{n-1}$

54. $T_n(x_1, x_2, x_3; x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3) \simeq S^n \vee S^n \vee S^{n+1}$

55. $T_n(x; x^4) \simeq T_n(x; x^2) \vee T_n(x; x^3) (n > 1)$

56. $T_n(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m)$ 之标准型 $(\vee_k S^n) \vee M^n(p_1^{k_1}) \vee \dots \vee M^n(p_l^{k_l}) \vee (\vee_l S^{n+1})$ 中的 $(n-k)$ 是否为群 $Z(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m)$ 最少生成元个数? $(m-l)$ 是否为表示矩阵的秩?

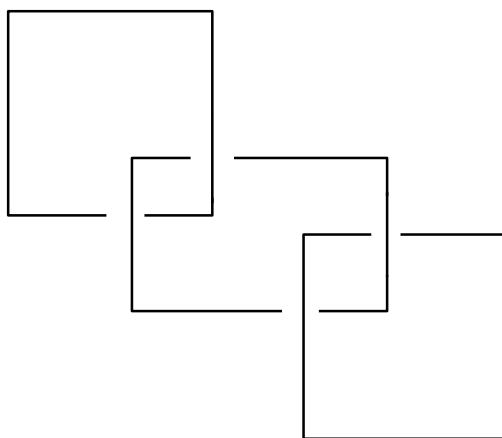
除此之外, 还有:

1. 映射 $z^2: S^1 \rightarrow S^1$ 的映射锥 \tilde{C}_{z^2} 是 $\mathbb{R}P^2$.
2. 映射 $i: A \hookrightarrow X$ 是嵌入, A 可缩. 是否有 $\tilde{C}_i \simeq X/A$? 若 A, X 是 CW 复形呢?
3. 度为 n 的复多项式 $p(z)$ 延拓为 S^2 到 S^2 的映射. 其映射度为? 此结论对 e^z 是否成立?

二 (26 = 2 × 13) 写出下列空间的基本伦型.

$\mathbb{R}^{m+n+1} \setminus \mathbb{R}^n (\cong S^{m+n+1} \setminus S^n)$	$\mathbb{R}^{m+n+1} \setminus S^n$	$(S^{m+n+1} \setminus S^n)^*$	$(\mathbb{R}^{m+n+1} \setminus S^n)^*$
$\mathbb{R}^3 \setminus \text{直线}$	$\mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \sqcup S^1)$	$\mathbb{R}^3 \setminus (\text{直线} \sqcup S^1)$	$(\mathbb{R}^3)^* \setminus (S^1 \sqcup S^1)$
$(\mathbb{R}^3)^* \setminus (\text{直线} \sqcup S^1)$	$(\mathbb{R}^3 \setminus \text{直线})^*$	$(\mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \sqcup S^1))^*$	$M(2, \mathbb{R}) \setminus SO(2, \mathbb{R})$
$(M(2, \mathbb{R}) \setminus SO(2, \mathbb{R}))^*$			

三 (10) 求如下纽结的基本群及一阶同调群.



四 (10) 求 $T(x, y, z, w; r_1, r_2, r_3, r_4)$ 的各阶 CW 复形包腔同调群. (零关系 r 忘了)

五 (10) 考虑 3-单形 $\Delta = \{1, 2, 3, 4\}$, 定义等价关系: $\{1, 2, 3\} \sim \{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\} \sim \{2, 3, 4\}$. 求 $X = \Delta / \sim$ 的各阶单纯同调群.