2021-2022 学年度第二学期伯苓班抽象代数 II 结课考试

一 (20 分) 判断下列命题是否正确, 如果正确请给出简要证明, 不正确请举出反例.

1 设 R 是主理想整环. M 是 $R-$ 模, N 是 M 的真子模, 则 N 的秩小于 M 的秩.

2 交换幺环 R 上的自由模一定是无扭模.

3 设 $f(x)$ 是实多项式, E 是 $f(x)$ 的分裂域, 则 $[E:R] \leq 2$

4 设 F 为域, 则 F 上的代数扩张都是有限扩张.

二 (15 分) 设 M 是主理想整环 D 上的有限生成模, N 是 M 的子模, 则

$$r(M) = r(N) + r(M/N)$$

$r(M)$ 表示模 M 的秩.

三 (15 分) 设 E 是域 F 的扩域, $[E:F] = p$, p 是素数. 取 $\alpha \in E - F$ 是 F 上的代数元, 证明 $E = F(\alpha)$.

四 (15 分, 每小问各五分) 设 E 是域 F 中 n 次多项式 $f(x)$ 的分裂域.

1 证明 $[E:F] \leq n!$.

2 举出一例域 E 和 F, 使得 $[E:F] = n!$ 成立.

3 举出一例域 E 和 F, 使得 $[E:F] < n!$ 成立.

五 (15 分) 设 α, β 是域 F 上的代数元. 有

$$[F(\alpha):F] = m, [F(\beta):F] = n.$$

证明 $[F(\alpha,\beta):F] \leq mn$.

六 (10 分) 对矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 6 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$$

求 $\mathbb{Z}^{3\times 3}$ 上的可逆矩阵 P、Q, 使得 PAQ 为 A 在 $\mathbb{Z}^{3\times 3}$ 上的标准形.

七 (10 分) F 是域. $A \in F^{n\times n}$ 是 $F^{n\times n}$ 的零因子当且仅当 A 不是 $F^{n\times n}$ 的可逆矩阵.