

数学学院本科生2021 — 2022学年第 2 学期抽象代数课程期末考试试卷(A 卷)

平时成绩: _____ 卷面折合成绩: _____ 总成绩: _____ (期末考试成绩和平时成绩比例: 70:30)

专业: _____ 年级: _____ 学号: _____ 姓名: _____

题目	一	二	三	四	五	六	七	卷面成绩
得分								

草稿区

一、 判断题. 判断下列论断是否正确, 若正确, 给出简要证明, 否则举反例说明. (本题共 20 分, 每小题 5 分)

1. 设 M 为主理想整环 D 上的自由模, N 为 M 的真子模, 则 N 的秩一定严格小于 M 的秩.
2. 设 M 为交换幺环 R 上的一个自由模, 则 M 是无扭模.
3. 记 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 且次数为 $n > 0$. 记 E 为 $f(x)$ 的分裂域. 则 $[E : \mathbb{R}] \leq 2$.
4. 域 F 的代数扩张总是有限扩张.

二、(本题15分) 设 D 为一个主理想整环, M 为一个有限生成 D 模. 任取 M 的子模 N , 试证明 D 模 M, N 和 M/N 的秩 $r(M), r(N)$ 和 $r(M/N)$ 满足关系

$$r(M) = r(N) + r(M/N).$$

草稿区

三、(本题15分) 设 E/F 为一个域扩张, 满足 $[E:F]$ 为一个素数 p . 任取 E 中不属于 F 的元素 α , 试证明 $E = F(\alpha)$.

四、(本题15分,每小题5分) 设域 E 为域 F 上某个次数为 $n > 0$ 的不可约多项式的分裂域.

1. 试证明 $[E : F] \leq n!$.
2. 试给出域 E 和 F 满足 $[E : F] = n!$ 的例子.
3. 试给出域 E 和 F 满足 $[E : F] < n!$ 的例子.

草稿区

五、(本题15分) 设 E/F 为一个域扩张. 设 $\alpha, \beta \in E$ 为域 F 上的代数元, 满足

$$[F(\alpha) : F] = m, \quad [F(\beta) : F] = n.$$

试证明 $[F(\alpha, \beta) : F] \leq mn$.

六、(本题10分) 试求 \mathbb{Z} 上矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

的标准形, 并求出 \mathbb{Z} 上3阶可逆矩阵 P 和 Q 使得 PAQ 为标准形.

草稿区

七、(本题10分) 任取自然数 $n > 1$, 考虑域 F 上的 n 阶方阵环 $F^{n \times n}$. 记 $A \in F^{n \times n}$ 为一个非零方阵. 试证明 A 为 $F^{n \times n}$ 中零因子当且仅当 A 不可逆.