

2021 级南开大学数学伯苓班动态进出试题——高等代数

考试时间：2022 年 9.24 日 8:30-11:30 满分 100 分

一、(10 分) 设 $n \times n$ 矩阵 $a_{ij} = \min\{i, j\}$, 求 $\det(a_{ij})$.

二、(10 分) 设 $A^3 = O$, 证明存在唯一的 n 阶实矩阵 X 满足 $X + AX + XA^2 = A$.

三、(30 分) 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

(1) 证明 AB 与 BA 有相同的特征多项式;

(2) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 AB 与 BA 的特征多项式, 若 $\deg f(x) > \deg g(x)$, 证明 $f(x) = xg(x)$;

(3) 若 BA 可对角化, 证明 $(AB)^2$ 可对角化.

四、(20 分) 设 \mathcal{A} 是有限维线性空间上 V 的线性变换.

(1) 证明存在正整数 k , 使得 $V = \ker \mathcal{A}^k \oplus \mathcal{A}^k V$;

(2) 证明存在非零线性变换 \mathcal{B} 使得 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = O$.

五、(30 分) 设 A, B 为 n 阶正定矩阵, 且 $A - B$ 也为正定矩阵.

(1) 证明存在唯一的正定矩阵 C 使得 $C^2 = A$;

(2) 设 $C^2 = A, D^2 = B$, 证明 $C(C - D) + (C - D)C$ 为正定矩阵;

(3) 证明 $C - D$ 为正定矩阵.