2022 春伯苓班动态进出考试复变函数试卷

年级：　　　　**学号：**　　　　**姓名：**　　　　**成绩:**

草　稿　区

得分

一 、（**本题 7 分**）设$p(\mathrm{z}) = z^n + a_1 z^{n-1}+\ldots+a_n$. 存在常数 M>0,满足当$|\mathrm{z}| \le 1$时,有$|p(\mathrm{z})| < \mathrm{M}$.
请证明：$p(\mathrm{z})$的零点都在$|\mathrm{z}| < \mathrm{M} + 1$中.

得分

二、（**本题 15 分**）假设函数 $f(z)$在圆盘 $|z|<2$ 内解析. 当 z 在单位圆盘$|z|<1$内时，请证明:

（1）$f(z)=i\,\mathrm{Im}\,f(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,(\mathrm{Re}\,f(e^{it}))dt.$

（2）$f(z)-f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2z}{e^{it}-z}\,(\mathrm{Re}\,f(e^{it}))dt.$

假设 $f(z)$进一步满足在$|z|=1$ 时，$\mathrm{Re}\,f(z)\geq 0$，请证明: 当 z 在单位圆盘$|z|<1$内时有$\mathrm{Re}\,f(z)\geq 0$.

得分

三 、（**本题 10 分**）设f(z)在单位圆盘D: |z| < 1 内解析. 设f(z)在D中的零点为$z_1, z_2, \ldots, z_n$（一个p阶零点出现p次）. 存在常数 M>0，满足对于任何$|z| < 1$，恒有$|f(z)| \le M$.

请证明：函数$f(z)$可以有更好的估计，即对于任何$|z| < 1$，恒有$|f(z)| \le \mathrm{M} \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right|$.

得 分

四 、（本题 10 分）记函数 f(z)在圆盘 |z|<2 内除了在单位圆周|z|=1 上有一个极点z_0外解析，且在单位圆盘$|z|<1$内有幂级数展开：f(z)=$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ，|z|<1.

（1）假设z_0是 1 阶极点，请证明：$\frac{a_n}{a_{n+1}} \to z_0(\mathrm{n} \to \infty)$.

（2）假设z_0是 2 阶极点，请问$\frac{a_n}{a_{n+1}} \to z_0(\mathrm{n} \to \infty)$是否成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由或者举出反例.

得分

五、（本题 8 分）设$f(z)$在$z \neq 0$处解析，0 为$f(z)$的 n（>0）阶极点. 设$f(z)$在$|z| = 1$上为实数. 请求出满足上述条件的所有的函数$f(z)$，写出$f(z)$的具体表达式.