数学科学学院本科生2021—2022学年第二学期《概率论》期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师: 专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

得 分

一、 (14分).

1, 设有N个袋子，每个袋中有a个黑球，b个白球，从第一袋中取一球放入第二个袋中，再从第二袋中取一球放入第三个袋中，如此下去，求从最后袋中取一球恰为黑球的概率；

2, 袋中有一球，不是红球就是白球，再往袋中放入一红球。现在随机的取出一球，恰为红球。试求袋中原来是白球的概率.

草 稿 区

得 分

二、 (14分).
设袋中有a个红球和b个白球，每次随机的取出一只后，放入s个同色球进袋中，R_n表示第n次摸出的是红球这个事件 (其中$a, b, s, n \in \mathbf{N}^+$)。求证：

$$P(R_n) = \frac{a}{a+b}.$$

草 稿 区

得 分

三、(14 分)

设ξ是连续型随机变量。试证，ξ具有"无记忆性", 即对于任意的$s > 0, t > 0$, 有

$$P(\xi > s + t | \xi > s) = P(\xi > t)$$

充分必要条件是ξ服从指数分布.

草 稿 区

得 分

四、(14分) 设$\xi \sim P(\lambda)$.

1, 求 ξ 的母函数;

2, 若η 与 ξ 独立同分布, 求 $\xi + \eta$ 的分布.

草 稿 区

得 分

五、(14分).

1, 若随机变量 ξ 与 η 独立，且均服从 $N(0,1)$ ，试求 $U=\xi^2+\eta^2$ 与 $V=\frac{\xi}{\eta}$ 的密度函数，并判断它们是否独立;

2, 若随机变量 X 与 X 独立. 证明：存在常数 C , 使得 $P(X=C)=1$.

草 稿 区

得 分

六、(16分). 设 ξ 为随机变量, $E\xi = 0$, $D\xi = \sigma^2 < \infty$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 试证

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2};$$

和

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}.$$

草 稿 区

得 分

七、(14分).

1, 叙述大数定律的定义；

2, 设 $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ 是相互独立且同分布的随机变量列，且存在常数 a, 使得 $E\xi_n = a$. 证明： $\{\xi_n\}$ 服从大数定律。