

2022-2023 学年数学分析 3-2 第一次月考

一.(15分)设曲线 Γ 的极坐标方程是 $r = \min\{2\sin\theta, 2\sqrt{3}\cos\theta\}$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$),求曲线 Γ 所围成的图形的面积.

二.(15分)求 $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$)绕直线 $y = x$ 旋转一周所得的旋转体的体积.

三.(15分)设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负连续, $\varphi(x) = \int_a^b |x-t|f(t)dt$, $x \in [a, b]$.证明: $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上下凸.

四.(15分)设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且满足 $0 \leq f(x) \leq x$, $x \in [0, 1]$.证明:

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 x^2 f(x)dx.$$

五.(15分)设 $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.证明: $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积.

六.(15分)设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续.证明: $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\lambda} \int_{-1}^1 f(x) e^{-\frac{|x|}{\lambda}} dx = f(0)$.

七.(10分)设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$,对任意 $x \geq 0$,有 $f'(x) \geq \int_0^x f(t)dt$.证明:对任意 $x \geq 0$,有 $\int_0^x f(t)dt \geq x$.