2022-2023学年最优化方法期末考试

一、设$f(x)$是凸函数，$A\in\mathbb{R}^{m\times n}, b$是一个$n$维向量，且存在$z$使得$Az-b<0$.若系统$f(x)<0, Ax-b\le 0$无解，证明存在非负向量$y$使得对任意$x$有$f(x)+y^T(Ax-b)\ge 0$成立.(提示：构造集合$C=\{(u,t)\in\mathbb{R}^{m+1}$: 存在$x$使得$f(x)<t, Ax-b\le u\}$,则0不是$C$中元素.)

二、证明：$f(x)$在$\mathbb{R}^n$上连续可微，则$f(x)$是凸函数的充分必要条件是对任意$x,y\in\mathbb{R}^n$有

$$\left(\nabla f(x)-\nabla f(y)\right)^T(x-y)\ge 0.$$

三、(1) 证明当判别式大于等于零时，基可行解是最优解；

(2) 用单纯形法解下列线性规划：

$$\min 2x_1-3x_2$$

$$s.t.\quad \begin{cases}-x_1+x_2\le 6\\ x_1+x_2\le 4\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

四、(1) 证明：用精确一维搜索的共轭方向法解二次最优化问题时至多迭代n步收敛；

(2) 写出拟牛顿法中校验矩阵H_k的表达式.

五、设$f(x)$连续可微，$L=\{x: f(x)\le f(x_1)$有界. 证明：若由DFP法产生的校正矩阵列$\{H_k\}$有界正定，则精确一维搜索的DFP方法得到的点列$\{x_k\}$的聚点都是$f(x)$的稳定点.

六、(1) 分别用图解法和KT方法解下列问题：

$$\min x_1^2+x_2^2-2x_1-6x_2$$

$$s.t.\quad \begin{cases}x_1+x_2\le 2\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

(2) 用$Lagrange$方法解下列问题：

min 一个二元二次目标函数

$s.t.$ 一个等式约束条件

七、(1)导出下列问题的$Lagrange$对偶问题，其中W是实对称矩阵：

$$\min x^TWx$$

$$s.t.\quad x_i^2=1, i=1,2,\cdots,n$$

(2) 用对数障碍罚函数法解下列问题：

$$\min x_1-2x_2$$

$$s.t.\begin{cases}1+x_1-x_2^2\ge 0\\ x_2\ge 0\end{cases}$$