2020-2021 学年第二学期高等代数与解析几何第一次月考试卷

任课教师： **学号：** **姓名：** **成绩：**

草 稿 区

得 分

一、 (20 分) 将下列实二次型化为实规范形, 并给出相应的非退化线性替换

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

得 分

二、 (15 分) 设 A 是一个正定矩阵, B 是一个实对阵矩阵, 证明: 对于 $t \in \mathbb{R}$ 充分大, $tA + B$ 正定.

得 分

三、 (15 分) 设 P 是一个数域, A 是 P 上的 n 阶方阵, $A^2 = E$. 设 $V_1 = \{x \in P^n | (A-E)x = 0\}$, $V_2 = \{x \in P^n | (A+E)x = 0\}$, 求证: $P^n = V_1 \oplus V_2$.

草 稿 区

得 分

四、 (15 分) 设 U, V, W 都是线性空间 G 的子空间. 求证: $(U+V)\cap(U+W) = U+(U+V)\cap W$.

得 分

五、 (15 分) 设 $V_1 = L((1,3,-1,4),(2,4,3,1)), V_2 = L((0,2,-5,7),(1,1,4,-3))$, 求: $V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$ 的基与维数.

草 稿 区

草 稿 区

得 分

六、(10 分) 设 V 是 n 维线性空间, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是其两组基. 求证: 对任意 $1\le k\le n-1$, 存在 $1\le j_1<\cdots<j_{n-k}\le n$, 使得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{n-k}}$ 是 V 的基.

得 分

七、(10 分) 设 V 是一个 n 维向量空间, $n>0$. 设 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{in}, i=1\cdots k$ 是 k 组基. 求证: 存在 $\xi\in V$ 使得, 它在这 k 组基下的坐标互不相同.