2022-2023 学年第二学期高等代数与解析几何 2-2

第三次月考试题

1. 设$\alpha_1=(1,1,-1,-1)$，$\alpha_2=(1,1,0,0)$，$\alpha_3=(0,0,-1,-1)$，$\alpha_4=(2,2,-1,-1)$，$\alpha_5=(1,0,-1,-1)$，求$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$在$R^4$中的正交补空间。（15 分）

2. 设三阶实对称矩阵A的各行元素和均为 3，$\alpha_1=(-1,2,-1)'$，$\alpha_2=(0,-1,1)'$是线性方程组$AX=0$的两个解向量，

   （1）求A的特征值与特征向量，

   （2） 求正交矩阵T和对角矩阵D，使$T'AT=D$。（17 分）

3. 设四阶方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a+2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$A$的若尔当标准型。（18 分）

4. 设$A\in C^{n\times n}$，λ_0为A的r重特征值，证明：秩$(\lambda_0E-A)\geq n-r$，而秩$(\lambda_0E-A)^r=n-r$。（15 分）

5. 设欧氏空间V中的变换σ满足：$\forall\alpha,\beta\in V$，$(\sigma\alpha,\beta)=(\alpha,\sigma\beta)$，证明：$\sigma$为对称变换。（15 分）

6. 设A是n阶正定矩阵，证明：对$\forall\alpha,\beta\in R^n$，都有$\alpha'A\alpha+\beta'A^{-1}\beta\geq 2\alpha'\beta$。（10 分）

7. 已知$A\in R^{m\times n}$，秩（A）$=n-1$，设线性方程组$AX=0$的基础解系为：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$，又设$\alpha_n$是$R^n$中的非零向量，记

$$G=\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_{n-1},\alpha_1) & \dots & (\alpha_{n-1},\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}，F=\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & \dots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix}$$

   证明：α_n到$AX=0$的解空间的距离$d=\sqrt{\frac{|G|}{|F|}}$。（10 分）