2022-2023学年度第二学期高等代数与解析几何第二次月考试题

1. （15）求可逆矩阵T, 使得$T^{-1}AT$ 为对角矩阵，其中
$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right).$$

2. (15)求
$$\left(\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{array}\right)^{10000}$$

3. (15)设V是数域P上的2维线性空间，其上线性变换$\mathcal{A}$在基$\{\eta_1,\ \eta_2\}$下矩阵为
$$A=\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{array}\right).$$
求证：$\mathcal{A}$只有4个不变子空间. 并写出这4个不变子空间.

4. (15)求证：如果一个可逆矩阵相似于反对称矩阵，那么它一定是偶数阶的.

5. (15)求证：如果$\mathbb{C}$上的n维空间V上的线性变换σ, τ满足，$\sigma+\tau+\sigma\tau=0$, 那么$\sigma\tau=\tau\sigma$, 并且它们有公共的特征向量.

6. (15)求证：设V为n维线性空间，σ为V上线性变换，如果$\sigma^{-1}(0)=\sigma(V)$, 那么n为偶数，并且，存在V的一组基，使得σ 表为矩阵
$$\left(\begin{array}{cc} 0 & E_{\frac{n}{2}} \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

7. (10)定义$P^{n\times n}$上的线性变换$\mathcal{A}$满足：$\mathcal{A}X=3X+4X^T$，求$\mathcal{A}$的特征多项式.