

数学科学学院 2021 级数学伯苓班《复变函数》期末考试

一.用留数定理计算积分:

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{5 + \cos t}$$

二.用 Liouville 定理证明每个 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 次复系数多项式恰好有 n 个根(重根按重数计算)

三.设当 $|z| \leq 1$ 时 $|P(z)| = |z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \leq 100$. 求证: $P(z)$ 的零点都在 $|z| < 101$ 中.

四.设 $z \neq 0$ 时 $f(z)$ 解析, 0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $f(z)$ 在 $|z| = 1$ 上是实数, 求证 $f(z) = \bar{a}z + \frac{a}{z} + b$, 其中 $a \neq 0, b$ 是实数.

五.设 $f(z)$ 在 $0 < |z| < R$ 中解析, $\operatorname{Re}(f(z)) \leq M$. 求证: 0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

六.设 $f(z)$ 在 $|z - z_0| > r_0$ 中解析且 $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = A$, 求证对任何 $R > r_0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} f(z) dz = A$$