2023–2024 学年第 1 学期抽象代数 I 课程期末考试试卷

参考解答

一, 判断下列论断是否正确, 若正确, 给出简要证明, 否则举反例说明.

1. 若群 G 的子群 H 和 K 满足 $K \lhd H$ 且 $H \lhd G$, 则有 $K \lhd G$.

2. 有理数加法群 $\mathbb{Q}$ 不是循环群.

3. 若群 G 为两个有限阶元素生成, 则 G 为有限群.

4. 若群 G 为无限群, 则 G 作用在任意一个无限集 X 上的轨道个数都是无限的.

5. 记 G 为一个群. 记其中心为

$$Z(G) := \{a \in G \mid \forall\, b \in G, ab = ba\}.$$

若 $G/Z(G)$ 为一个循环群, 则 G 为一个交换群.

解. 1. 错误. 反例: 令 $G = S_4$, $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $K = \{e, (12)(34)\}$, 则有

$$K \lhd H \text{ 且 } H \lhd G.$$

注意到 $(12)(34)$ 的共轭类为 H 中的非幺元构成的集合, 因此 K 不是 G 的正规子群.

2. 正确. 任取 $\mathbb{Q}$ 的元素 p/q ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ 且 $\gcd(p, q) = 1$), 我们有

$$\left\langle \frac{p}{q} \right\rangle = \left\{ \frac{kp}{q} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

则

$$\frac{1}{q+1} \notin \langle S \rangle.$$

(否则有 $kp(q+1) = q$, 注意到若 $kp \neq 0$, 我们有 $|kp(q+1)| > |q|$. 若 $kp = 0$, 则 $q = 0$, 均矛盾. 因此该等式不成立.)

3. 错误. 反例: 我们取 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 中两个元素

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

则有

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

注意到 $|\operatorname{tr} AB| = 3 > 2$, 且 $\det AB = 1$, 因此有两个不同的互为倒数的特征根, 所以为无限阶.

4. 错误. 反例: 考虑 $\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的作用:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

是可递的. 因此只有一个轨道. (群的左平移作用是可递的)

5. 正确. 由于 $G/Z(G)$ 为循环群, 存在元素 $a \in G$, 满足 $aZ(G)$ 为 $G/Z(G)$ 的生成元, 因此

$$G = \{a^k b \mid k \in \mathbb{Z}, \quad b \in Z(G)\}.$$

任取 $a^k b$ 和 $a^l c$, 满足 $k, l \in \mathbb{Z}$ 以及 $b, c \in Z(G)$, 我们有

$$(a^k b)(a^l c) = a^{k+l} bc = (a^l c)(a^k b).$$

因此 G 交换.

注 0.0.1.
注意到 $Z(G) = G$, 我们进一步得到循环群 $G/Z(G)$ 实际上是平凡的.

$\square$

二, 记 G 为一个群. 任取 G 的非空子集 S, 我们考虑以下 G 的子集

$$\langle\langle S\rangle\rangle := \bigcap\{N \lhd G \mid S \subset N\},$$

即 $\langle\langle S\rangle\rangle$ 为所有包含 S 的 G 的正规子群的交集.

1. **试证明: $\langle\langle S\rangle\rangle \lhd G$.**

证明. 首先我们有

$$S \subset G \lhd G,$$

因此

$$G \in \{N \lhd G \mid S \subset N\} \neq \emptyset.$$

注意到子群对任意交封闭, 因此

$$\langle\langle S\rangle\rangle < G.$$

下证子群 $\langle\langle S\rangle\rangle$ 是 G 的正规子群. 任取 $a \in G$, $b \in \langle\langle S\rangle\rangle$, 由 $\langle\langle S\rangle\rangle$ 的定义, 任取 $N \lhd G$, 满足 $S \subset N$, 都有 $b \in N$. 由于 N 为正规子群, 因此

$$aba^{-1} \in N.$$

由此可得

$$aba^{-1} \in \bigcap\{N \lhd G \mid S \subset N\} = \langle\langle S\rangle\rangle.$$

因此

$$\langle\langle S\rangle\rangle \lhd G.$$

□

2. **记 $a \in G$ 的共轭类为**

$$[a] := \{b \in G \mid \exists c \in G, b = cac^{-1}\}.$$

试证明: $\langle\langle S\rangle\rangle$ 为由 G 的子集

$$\bigcup_{a\in S}[a]$$

生成 G 的子群.

证明. 由子群生成的定义, 我们有

$$\left\langle \bigcup_{a\in S}[a] \right\rangle := \bigcap\left\{K < G \,\middle|\, \bigcup_{a\in S}[a] \subset K\right\}$$

任取 $a \in S$, 注意到 $\langle\langle S\rangle\rangle$ 为 G 的正规子群, 因此

$$[a] \subset \langle\langle S\rangle\rangle.$$

我们有

$$\bigcup_{a\in S}[a] \subset \langle\langle S\rangle\rangle,$$

进而有

$$\left\langle \bigcup_{a\in S}[a] \right\rangle \subset \langle\langle S\rangle\rangle.$$

我们现在考虑另一个方向的包含关系. 注意到

$$\left\langle \bigcup_{a\in S}[a] \right\rangle = \{b_1a_1b_1^{-1}\cdots b_ka_kb_k^{-1} \mid k\in\mathbb{N}^*, a_1,...,a_k\in S\cup S^{-1}, b_1,...,b_k\in G\}.$$

任取 $c\in G$, 任取

$$b_1a_1b_1^{-1}\cdots b_ka_kb_k^{-1} \in \left\langle \bigcup_{a\in S}[a] \right\rangle$$

都有

$$c(b_1a_1b_1^{-1}\cdots b_ka_kb_k^{-1})c^{-1} = (cb_1)a_1(cb_1)^{-1}\cdots(cb_k)a_k(cb_k)^{-1} \in \left\langle \bigcup_{a\in S}[a] \right\rangle.$$

因此

$$\left\langle \bigcup_{a\in S}[a] \right\rangle \lhd G.$$

由 $\langle\langle S\rangle\rangle$ 的定义可知

$$\langle\langle S\rangle\rangle \subset \left\langle \bigcup_{a\in S}[a] \right\rangle.$$

综上所述

$$\langle\langle S\rangle\rangle = \left\langle \bigcup_{a\in S}[a] \right\rangle.$$

$\square$

三, 任取自然数 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, 我们考虑 $\mathbb{Z}_n$ 中关于乘法可逆的元素构成的乘法群

$$U_n := \{\overline{m} \in \mathbb{Z}_n \mid \exists \overline{k} \in \mathbb{Z}_n, \overline{k} \cdot \overline{m} = \overline{1}\}.$$

1. **任取 $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$, 试证明 $\overline{m} \in U_n$ 当且仅当 $\gcd(m,n) = 1$.**

证明. 任取 $m \in \mathbb{Z}$, 注意到 $\overline{m} \in U_n$ 当且仅当存在 $k \in \mathbb{Z}$, 满足

$$\overline{k} \cdot \overline{m} = \overline{1},$$

等价地

$$km = 1 + ln,$$

其中 $l \in \mathbb{Z}$. 利用 Bezout 等式, 这等价于 $\gcd(m,n) = 1$. □

2. **设 $n = p$ 为一个素数. 试证明任取 $\overline{m} \in U_p$ 都有**

$$\overline{m}^{p-1} = \overline{1}.$$

证明. 注意到 U_p 中有 $p-1$ 个元素. 利用 Lagrange 定理, 任取 $\overline{m} \in U_p$, 都有

$$o(\overline{m}) \mid p - 1.$$

因此有

$$\overline{m}^{p-1} = \overline{1}.$$

□

四, 记 G 为一个群, H 为 G 的一个子群. 考虑 G 在 H 的左陪集空间 G/H 上通过左平移得到的作用:

$$\begin{aligned}\Phi: G \times G/H &\to G/H \\ (a, bH) &\mapsto (ab)H\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}\Phi_a: G/H &\to G/H \\ bH &\mapsto (ab)H\end{aligned}$$

1. **试证明: 由 Φ 给出的群 G 在 G/H 上的作用是可递的.**

   证明. 任取 $a, b \in G$, 注意到存在 $c = ba^{-1}$, 满足

   $$\Phi(c, aH) = (ba^{-1}a)H = bH.$$

   因此该作用是可递的. □

2. **设 G 为一个有限群. 记 p 为整除 $|G|$ 最小的素数, 且 $[G : H] = p$. 考虑由 Φ 给出的群同态**

   $$\begin{aligned}\varphi: G &\to S_{G/H}. \\ a &\mapsto \Phi_a\end{aligned}$$

   记 $N = \ker \varphi$.

   a) **试证明: $N \lhd H$.**

   证明. 由于 $N = \ker \varphi$, 因此 $N \lhd G$. 任取 $K < G$, 满足 $N < K$, 都有 $N \lhd K$.
   任取 $a \in N$, 任取 $b \in H$, 我们有

   $$abH = bH.$$

   特别地, 令 $b = e$, 我们有

   $$aH = H.$$

   这等价于 $a \in H$. 因此

   $$N < H,$$

   进而有

   $$N \lhd H.$$

   □

   b) **试证明: $[G : N] \mid p!$.**

   证明. 利用群同态基本定理, 我们有

   $$G/N \cong \varphi(G) < S_{G/H},$$

   其中 $S_{G/H}$ 为 G/H 的对称群. 因此我们有

   $$[G : N] = |G/N| = |\varphi(G)|.$$

   由于 $[G : H] = p$, 集合 G/H 中有 p 个元素, 因此 $S_{G/H}$ 同构于 S_p, 有 $p!$ 个元素. 利用 Lagrange 定理, 我们有

   $$[G : N] = |\varphi(G)| \mid |S_{G/H}| = p!$$

   □

c) **试证明：$H = N$.**

证明. 由于

$$N \lhd H < G,$$

我们有以下指数之间的关系

$$[G:N] = [G:H][H:N] = p[H:N].$$

由于 $[G:N]|p!$, 因此 p 是 $[G:N]$ 最大的素因子, 且唯一. 另一方面

$$[G:N] \mid |G|,$$

因此 p 是 $[G:N]$ 最小的素因子.

因此 $[G:N] = p$. 由此可知 $[H:N] = 1$, 我们有

$$H = N.$$

$\square$

五, 记 G 为一个有限群, X 为一个非空有限集合且 $|X|>1$. 设 G 在 X 上有一个可递群作用

$$\begin{aligned}\Phi: G\times X &\to X\\ (a,x)&\mapsto ax\end{aligned}$$

记

$$D=\{(a,x)\in G\times X \mid ax=x\}.$$

任取 $a\in G$ 和 $x\in X$, 我们记

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}(x)&:=\{b\in G \mid bx=x\}\\ \mathrm{Fix}(a)&:=\{y\in X \mid ay=y\}\end{aligned}$$

1. **试证明: 任取 $x\in X$, 都有以下等式**

$$|X|=[G:\mathrm{Stab}(x)].$$

证明. 任取 $x\in X$, 注意到 G 在 X 上的作用是可递的, 任取 $y\in X$, 存在 $a\in G$, 满足

$$ax=y.$$

记

$$G_{x,y}:=\{b\in G \mid bx=y\}.$$

任取 $b\in G_{x,y}$, 都有

$$a^{-1}b\in\mathrm{Stab}(x).$$

因此

$$b=a(a^{-1}b)\in a\mathrm{Stab}(x).$$

考虑所有的 $b\in G_{x,y}$, 我们就有

$$G_{x,y}\subset a\mathrm{Stab}(x).$$

另一方面, 任取 $c\in\mathrm{Stab}(x)$, 我们有

$$(ac)x=ax=y.$$

因此

$$G_{x,y}\supset a\mathrm{Stab}(x)$$

我们进而有

$$G_{x,y}=a\mathrm{Stab}(x).$$

由此我们可以构造以下映射

$$\begin{aligned}F: X&\to G/\mathrm{Stab}(x)\\ y&\mapsto G_{x,y}=a\mathrm{Stab}(x)\end{aligned}$$

由于 $G_{x,y}=G_{x,y'}$ 当且仅当 $y=y'$, 因此这是一个单射. 另一方面, 任取 $a\in G$, 都有

$$F(ax)=a\mathrm{Stab}(x).$$

因此 F 是满射. 由于 F 是双射, 我们有

$$|X|=|G/\mathrm{Stab}(x)|=[G:\mathrm{Stab}(x)].$$

□

2. **考虑 $|D|$, 试证明: 我们有以下等式**

$$|G| = \sum_{a \in G} |\text{Fix}(a)|.$$

证明. 注意到集合 D 有以下不交并分解

$$D = \coprod_{a \in G} \{a\} \times \text{Fix}(a).$$

因此

$$|D| = \sum_{a \in G} |\text{Fix}(a)|.$$

另一方面,

$$D = \coprod_{x \in X} \text{Stab}(x) \times \{x\}.$$

因此

$$|D| = |X||\text{Stab}(x)|.$$

由之前的结论

$$|X| = \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|},$$

我们有

$$\sum_{a \in G} |\text{Fix}(a)| = |X||\text{Stab}(x)| = |X|\frac{|G|}{|X|} = |G|.$$

□

3. **试证明: 存在 $a \in G$, 满足**

$$\text{Fix}(a) = \emptyset.$$

证明. 若所有的元素 $a \in G$ 都有

$$\text{Fix}(a) \neq \emptyset,$$

则对任意 $a \in G$ 有

$$|\text{Fix}(a)| \geq 1.$$

因此

$$|G| = \sum_{a \in G} |\text{Fix}(a)| \geq \text{Fix}(e) + |G| - 1 = |X| + |G| - 1 > |G|.$$

最后一个不等式是由于 $|X| > 1$. 因此矛盾. 所以一定存在 $a \in G$, 满足

$$\text{Fix}(a) = \emptyset.$$

□

例子 0.0.2.
考虑群 S_n 在 $\{1, ..., n\}$ 上的作用 $(n > 1)$, 注意到作用是可递的, 其中 n-轮换没有不动点. 考虑 S_n 的一个可递子群, 即在 $\{1, ..., n\}$ 上的作用是可递的. 例如一个 n-轮换生成的循环群.

一个 S_n 的可递子群不一定有 n-轮换, 比如 $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. 这个群作用在 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上是可递的. 注意到除了 e 之外的 3 个元素都没有不动点. 这里有关系

$$4 = |G| = \text{Fix}(e) + \text{Fix}((12)(34)) + \text{Fix}((13)(24)) + \text{Fix}((14)(23)) = 4 + 0 + 0 + 0.$$

六, 记 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. 考虑 n-元对称群 S_n 在 $\{1...,n\}$ 作用. 任取 $i \in \{1,...,n\}$, 我们记

$$\mathrm{Stab}(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}.$$

1. **试证明: 任取 $i, j \in \{1,...,n\}$, 都有 $\mathrm{Stab}(i)$ 和 $\mathrm{Stab}(j)$ 在 S_n 中共轭.**

   证明. 任取 $i, j \in \{1,...,n\}$, 任取 $\sigma \in \mathrm{Stab}(i)$, $\tau \in S_n$, 满足

   $$\tau(i) = j,$$

   例如 $\tau = (ij)$, 我们都有

   $$(\tau\sigma\tau^{-1})(j) = j.$$

   因此

   $$\tau\sigma\tau^{-1} \in \mathrm{Stab}(j).$$

   因此我们有

   $$\tau\mathrm{Stab}(i)\tau^{-1} \subset \mathrm{Stab}(j).$$

   交换 i 和 j 的角色, 考虑 τ^{-1}, 以上结论告诉我们

   $$\tau^{-1}\mathrm{Stab}(j)(\tau^{-1})^{-1} \subset \mathrm{Stab}(i),$$

   等价地, 我们有

   $$\mathrm{Stab}(j) \subset \tau\mathrm{Stab}(i)\tau^{-1}.$$

   因此我们有

   $$\mathrm{Stab}(j) = \tau\mathrm{Stab}(i)\tau^{-1}.$$

   □

2. **设 $n > 4$. 试证明: 任取 $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_n)$, 若对任意 $i \in \{1,...,n\}$, 都存在 $\sigma_i \in S_n$, 满足**

   $$\varphi(\mathrm{Stab}(i)) = \mathrm{Ad}_{\sigma_i}(\mathrm{Stab}(i)),$$

   其中 Ad_{σ_i} 为 σ_i 给出的内自同构, 则存在 $\sigma \in S_n$, 满足

   $$\varphi = \mathrm{Ad}_\sigma \in \mathrm{Inn}(S_n).$$

   证明一. 若作为集合, 我们有

   $$\varphi(\mathrm{Stab}(i)) = \mathrm{Ad}_{\sigma_i}(\mathrm{Stab}(i)),$$

   则由于

   $$\mathrm{Ad}_{\sigma_i}(\mathrm{Stab}(i)) = \mathrm{Stab}(\sigma_i(i)).$$

   注意到 φ 为同构, 任取不同的 $i, j \in \{1,...,n\}$, 我们有

   $$\mathrm{Stab}(i) \neq \mathrm{Stab}(j),$$

   因此有

   $$\varphi(\mathrm{Stab}(i)) \neq \varphi(\mathrm{Stab}(j)).$$

   因此 φ 给出了

   $$\{\mathrm{Stab}(1), ..., \mathrm{Stab}(n)\}$$

   的置换. 考虑 $\sigma \in S_n$, 满足对任意 i, 有 $\sigma(i) = \sigma_i(i)$,我们有

   $$\varphi(\mathrm{Stab}(i)) = \mathrm{Stab}(\sigma(i)).$$

考虑 $(12) \in S_n$. 由于

$$(12) \in \mathrm{Stab}(3) \cap \cdots \cap \mathrm{Stab}(n),$$

因此

$$\varphi((12)) \in \mathrm{Stab}(\sigma(3)) \cap \cdots \cap \mathrm{Stab}(\sigma(n)),$$

即 $\varphi((12))$ 固定 $\sigma(3), ..., \sigma(n)$. 由于 $\varphi((12))$ 非平凡, 我们有

$$\varphi((12)) = (\sigma(1)\sigma(2)).$$

类似地, 我们可以证明任取 (ij), 我们有 $\varphi(ij) = (\sigma(i)\sigma(j))$. 由于对换生成 S_n, 我们有

$$\varphi = \mathrm{Ad}_\sigma.$$

$\square$

证明二:. 若题目为 "$\varphi|_{\mathrm{Stab}(i)} = \mathrm{Ad}_{\sigma_i}|_{\mathrm{Stab}(i)}$"
考虑 $i = 1, j = 2$, 以及 $\mathrm{Stab}(1) \cap \mathrm{Stab}(2)$ 中元素在 φ 下的像. 由条件, 我们有

$$(\sigma_1(3) \cdots \sigma_1(n)) = \mathrm{Ad}_{\sigma_1}(3 \cdots n) = \varphi(3 \cdots n) = \mathrm{Ad}_{\sigma_2}(3 \cdots n) = (\sigma_2(3) \cdots \sigma_2(n)),$$

且任取 $k \in \{3, ..., n\}$, 我们考虑去掉 k 剩下的元素给出的轮换 $(3 \cdots \widehat{k} \cdots n)$, 有

$$\mathrm{Ad}_{\sigma_1}(3 \cdots \widehat{k} \cdots n) = \varphi(3 \cdots \widehat{k} \cdots n) = \mathrm{Ad}_{\sigma_2}(3 \cdots \widehat{k} \cdots n),$$

因此任取 $k \in \{3, ..., n\}$, 我们有

$$\sigma_1(k) = \sigma_2(k).$$

不妨设

$$\sigma_1(k) = \sigma_2(k) = k.$$

若 $\sigma_1 \neq \sigma_2$, 我们不妨设 $\sigma_1(1) = 1$, 且 $\sigma_2(1) = 2$, 则有

$$\varphi(\mathrm{Stab}(1)) = \mathrm{Stab}(\sigma_1(1)) = \mathrm{Stab}(1) = \mathrm{Stab}(\sigma_2(2)) = \varphi(\mathrm{Stab}(2)),$$

矛盾. 因此 $\sigma_1 = \sigma_2$. 对所有 $\{1, ..., n\}$ 不同的数 i 和 j 做以上讨论, 我们可以得到

$$\sigma_1 = \cdots = \sigma_n,$$

记为 $\sigma \in S_n$.
因此任取 $(ij) \in S_n$, 我们有

$$\varphi(ij) = \mathrm{Ad}_\sigma(ij).$$

由于 $\{(ij) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ 生成 S_n, 因此

$$\varphi = \mathrm{Ad}_\sigma.$$

$\square$

3. **设 $n > 4$. 已知 A_n 为单群. 试证明: 任取 S_n 的子群 H 和 K, 满足**

$$[S_n : H] = [S_n : K] = n,$$

则存在 $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_n)$, 满足 $\varphi(H) = K$.

证明. 我们考虑 S_n 在 S_n/H 上的左平移作用.

$$\begin{aligned} F: S_n \times S_n/H &\to S_n/H \\ (\sigma, \tau H) &\mapsto (\sigma\tau)H \end{aligned}$$

我们有群同态

$$\begin{aligned} f: S_n &\to S_{S_n/H} \\ \sigma &\mapsto F(\sigma, \cdot) \end{aligned}$$

由于 $\ker f \lhd S_n$, 我们有

$$\ker f = \{e\}, A_n \text{ 或者 } S_n.$$

由于 $\ker f \lhd H$, 因此

$$[S_n : \ker f] = [S_n : H][H : \ker f] \geq n > 2.$$

由此可知 $\ker f = \{e\}$, 同态 f 为单射. 注意到

$$|S_n/H| = [S_n : H] = n,$$

因此 f 为同构.

考虑作用 F 在 H 上的限制, 我们有 f 给出了子群同构

$$f(H) = \mathrm{Stab}(H).$$

这里 $\mathrm{Stab}(H)$ 为 $S_{S_n/H}$ 中 $H \in S_n/H$ 的稳定化子.

类似的, 我们考虑 S_n 在 S_n/K 上的作用, 则有群同构

$$g: S_n \to S_{S_n/K}.$$

进一步 g 给出了子群同构

$$g(K) = \mathrm{Stab}(K),$$

其中 $\mathrm{Stab}(K)$ 为 $S_{S_n/K}$ 中 $K \in S_n/K$ 的稳定化子.

我们记

$$S_n/H = \{a_1H, a_2H, ..., a_nH\},$$

以及

$$S_n/K = \{b_1K, b_2K, ..., b_nK\},$$

满足 $a_1H = H$, $b_1K = K$.

我们考虑集合 S_n/H 和 S_n/K 之间的将 H 送到 K 双射 η: 任取 $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\eta(a_iH) = b_iK.$$

双射 η 诱导了 $S_{S_n/H}$ 到 $S_{S_n/K}$ 的一个群同构 $\widetilde{\eta}$. 任取 $h \in S_{S_n/H}$, 我们有

$$\widetilde{\eta}(h) = \eta \circ h \circ \eta^{-1}.$$

注意到

$$\widetilde{\eta}(\mathrm{Stab}(H)) = \mathrm{Stab}(K).$$

令 $\varphi = g^{-1} \circ \widetilde{\eta} \circ f$, 则有 $\varphi(H) = K$. □

4. **试证明：以下两个叙述等价，**

a) $\mathrm{Inn}(S_n) = \mathrm{Aut}(S_n)$**.**

b) **任取 S_n 的子群 H 和 K, 满足**

$$[S_n : H] = [S_n : K] = n$$

都有 H 和 K 在 S_n 中共轭.

证明. 由前边的结论知, 任取这样的 H 和 K, 都有 $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_n)$, 满足 $\varphi(H) = K$. 因此若 $\mathrm{Inn}(S_n) = \mathrm{Aut}(S_n)$, 存在 $\sigma \in S_n$, 满足

$$\mathrm{Ad}_\sigma(H) = K.$$

因此二者共轭.

反过来假设任意两个指数为 n 的 S_n 的子群都相互共轭. 任取 $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_n)$, 则任取 $i \in \{1, ..., n\}$, 由于 $\mathrm{Stab}(i)$ 在 S_n 中的指数为 n, 因此 $\varphi(\mathrm{Stab}(i))$ 也是指数为 n 的 S_n 的子群. 有之前的结论知, $\varphi \in \mathrm{Inn}(S_n)$.

因此 $\mathrm{Aut}(S_n) = \mathrm{Inn}(S_n)$ □

注 0.0.3.
这个题目给出了 S_n 的自同构都是内自同构的一个充要条件. 我们在习题中证明了 $n \neq 2, 6$ 的时候, S_n 的自同构都是内自同构, 以上几个问题告诉我们, 此时, 所有 S_n 的指数 n 的子群都是某个 i 的稳定化子 $\mathrm{Stab}(i)$.

另一方面, 我们也可以考虑 $n = 6$ 的情形. 考虑以下几个命题:

命题 0.0.4
任取 S_5 的一个 5 阶子群 P, 我们有 P 的正规化子

$$N(P) := \{\sigma \in S_5 \mid \sigma P \sigma^{-1} = P\}$$

满足 $|N(P)| = 20$.

考虑 S_5 在 $S_5/N(P)$ 上的左平移作用.

命题 0.0.5
该作用给出 S_5 到 S_6 的一个群单同态 φ.

命题 0.0.6
群 S_5 在 $S_5/N(P)$ 上的作用是可递的.

推论 0.0.7
$\varphi(S_5)$ 是 S_6 的可递子群.

推论 0.0.8
$\mathrm{Inn}(S_6) \neq \mathrm{Aut}(S_6)$.