

2023-2024 抽象代数期中考试

November 6, 2023

- \mathbb{Z}_6 有多少个子群? 写出所有非平凡子群
- 设 $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, |ad - bc| = 1 \right\}$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$, H 是否是 G 的正规子群
- 证明: $f(x) = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$ 是 $(\mathbb{R}, +)$ 到 (\mathbb{C}^*, \cdot) 的一个群同态, 并求 $\ker f$
- A_5 是否有30阶子群?
- 设 G 是循环群, $H < G$, 证明 G/H 也是循环群
- 证明 6 阶非交换群必与 S_3 同构
- 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$, 求证:
 - A, B 生成的群 G 是 8 阶群
 - G 是否与 D_4 同构
- 设 $S = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$.
 - 证明 S 是 S_n 的子群
 - 证明 $(1)(12)(13) \cdots (1n)$ 是 S_n 关于 S 的左陪集代表元系
- 设 G 是有限群, p 是 $|G|$ 的最小素因子, H 是 G 的 p 阶正规子群, 证明 $H \subseteq C(G)$