

2023-2024 数学分析期中考试

1. 设 L 是曲面 $x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 和平面 $x + z = 1$ 在第一卦限内的交线, 从 $x > 1$ 看是逆时针方向, 计算第二型曲线积分 $\int_L ydx + zdy + xdz$
2. 计算第二型曲线积分 $\int_L \frac{ydx + (1-x)dy}{(x-1)^2 + 100y^2}$, 其中 L 是以 $(0, 2023)$ 为圆心, 2024 为半径的圆, 沿逆时针方向
3. 计算第一型曲面积分 $\iint_S \frac{1}{\sqrt{8z - z^2}} dS$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 4y$ 截下且在 $z \leq 4$ 的部分
4. 计算如下第二型曲面积分, 其中 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 与 $z = 0, z = 4$ 所围成的立体的外侧.

$$\iint_{\Sigma} (x + 2y) dx dy + (xz - y) dy dz \quad (1)$$

5. 请判断下列级数的收敛性并说明理由 (请详细写出是绝对收敛、条件收敛、还是发散)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)$

(2) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{2^n} \right)$

6. 请判断下列广义积分的收敛性并说明理由 (请详细指出是绝对收敛、条件收敛、还是发散)

(1) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n \ln n) a_n$ 收敛, 问:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否一定收敛?

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 是否一定收敛