

20级数学分析I第1次月考试题

一、(本题20分) 用定义证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2} = 3.$$

二、(本题15分) 设 $a > 0, x_1 > 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n = 1, 2, \dots.$$

求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

三、(本题15分) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = a$, 数列 $\{n^2(x_n - x_{n-1})\}$ 收敛, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

四、(本题30分) 用现有知识计算下列极限:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}{\sin 2x}.$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(x \sin \frac{1}{x} \right) \ln x.$

五、(本题10分) 用定义证明数列 $\{\cos n\}$ 发散.

六、(本题10分) 设 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中有定义. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 的充分必要条件是
对 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中任何严格递减的以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.