

数理科学与大数据本科生2021-2022学年第二学期

“数学分析II”期中考试试卷

学号：

姓名：

注意事项

1. 解答必须写在答题卡上，写在本试卷上的解答无效.
2. 试卷共4页，共7道大题. 考生不得自行拆开装订成册的试卷.
3. 试卷的空白区域为草稿区，考试中不得使用自备草稿纸.

一、(15分) 判断极限 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$ 是否存在，如果存在并求其值.

二、(15分) 设 $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$, 求全微分 $df(0, 0)$ 和二阶全微分 $d^2f(0, 0)$.

三、(15分) 求旋轮线 $x = \sqrt{3}(t - \sin t)$, $y = \sqrt{3}(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 绕 x 轴旋转所得曲面的面积.

四、(15分) 计算定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x + \sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

五、(15分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $D = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$, 令

$$g(x, y) = f(x) \sin y, \quad (x, y) \in D.$$

证明: $g(x, y)$ 在 D 上一致连续.

六、(15分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

七、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续可微, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 记 $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$. 证明: 对任

意 $x \in [0, 1]$, 都有

$$\left| \int_0^x f(t)dt \right| \leq \frac{M}{8}.$$