

任课教师: 学号: 姓名: 成绩:

一	二	三	四	五	六

得分 一、(15分) 设 $u(x, y) = x \ln(x + r) - r$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 求证:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x + r}.$$

证 由导数的四则运算法则和链式法则, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \ln(x + r) + x \cdot \frac{1}{x + r} \cdot \left(1 + \frac{x}{r}\right) - \frac{x}{r} = \ln(x + r), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x \cdot \frac{1}{x + r} \cdot \frac{y}{r} - \frac{y}{r} = -\frac{y}{x + r}.\end{aligned}$$

进而得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{x + r} \cdot \left(1 + \frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{(x + r) - y \cdot \frac{y}{r}}{(x + r)^2} = -\frac{rx + x^2}{r(x + r)^2} = -\frac{x}{r(x + r)}.\end{aligned}$$

因此, 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{x}{r(x + r)} = \frac{1}{x + r}.$$

□

得分 二、(30分, 每小题15分) 计算下列各题.

(1) 判断极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$ 是否存在, 如果存在并求其值.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^{\sqrt{x}} \frac{f(t)}{t^2} dt$.

解 (1) 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$ 存在. 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 就有

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 |\cos^3 \theta + \sin^3 \theta|}{r^2} \leq 2r.$$

当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, 有 $r \rightarrow 0^+$. 因此, 由两边夹定理知 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = 0$.

(2) 令 $F(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$, $x \in (0, 1]$, 则 $F(x) = - \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt$, 从而由微积分基本定理知

$$F'(x) = -\frac{f(x)}{x^2}, \quad \forall x \in (0, 1].$$

由洛必达法则得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^{\sqrt{x}} \frac{f(t)}{t^2} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x [F(x) - F(\sqrt{x})] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(\sqrt{x})}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{f(x)}{x^2} - \left(-\frac{f(\sqrt{x})}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[f(x) - \frac{\sqrt{x} f(\sqrt{x})}{2} \right] \\ &= f(0) - 0 \\ &= f(0). \end{aligned}$$

□

得 分

三、(15分) 设 $f(x) \in C^2([0, \pi])$, 且 $f(0) = 3$. 已知 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x \, dx = 10$, 求 $f(\pi)$.

解 由分部积分法, 得

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx \\
 = & \left. (-\cos x) f(x) \right|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) f'(x) \, dx \\
 = & f(\pi) + f(0) + \int_0^\pi f'(x) \cos x \, dx \\
 = & f(\pi) + 3 + \left. \sin x \cdot f(x) \right|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \cdot f''(x) \, dx \\
 = & f(\pi) + 3 - \int_0^\pi f''(x) \sin x \, dx.
 \end{aligned}$$

于是有

$$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x \, dx = f(\pi) + 3.$$

又已知 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x \, dx = 10$, 故 $f(\pi) + 3 = 10$, 解得 $f(\pi) = 7$.

□

得分 四、(15分) 求球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$)所割下部分立体的体积.

解 记 $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq ax\}$, 则球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$)所割下部分的立体为

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, -f(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}.$$

于是其体积为

$$V_J(\Omega) = \int_{\Omega} dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{-f(x,y)}^{f(x,y)} dz = 2 \iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

在极坐标下, $x^2 + y^2 \leq ax$ 就是 $r \leq a \cos \theta$, 于是 D 可以表示为

$$D = \{(r, \theta) | -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq a \cos \theta\}.$$

因此, 所求体积为

$$\begin{aligned} V_J(\Omega) &= 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^{a \cos \theta} d\theta \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} (a^3 - a^3 |\sin \theta|^3) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 - \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 - \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d(-\cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 - \frac{4}{3} a^3 \int_0^1 (1 - u^2) du \quad (u = \cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 - \frac{4}{3} a^3 \left(u - \frac{1}{3} u^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 - \frac{8}{9} a^3. \end{aligned}$$

□

得分 五、(15分, 第一问5分, 第二问10分)

(1) 隐函数存在定理可以保证在哪些点的邻域内, 由方程

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$$

可唯一地确定隐函数 $z = z(x, y)$?

(2) 求隐函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

解 (1) 令 $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 4$, 则 $f'_z = 2z - 4$. 因为 f 和 f'_z 都连续, 所以由隐函数存在定理知, 当 $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ 且 $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 时, 在 (x_0, y_0, z_0) 的一个邻域内, 方程 $f(x, y, z) = 0$ 可唯一地确定隐函数 $z = z(x, y)$. 因此, 隐函数存在定理可以保证在 $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ 且 $z_0 \neq 2$ 点 (x_0, y_0, z_0) 的一个邻域内, 方程 $f(x, y, z) = 0$ 可唯一地确定隐函数 $z = z(x, y)$.

(2) 方程 $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$ 两边对 x 求导, 得

$$4x + 2z \cdot z'_x + 2y - 2 - 4z'_x = 0,$$

方程 $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$ 两边对 y 求导, 得

$$2y + 2z \cdot z'_y + 2x - 2 - 4z'_y = 0.$$

由极值的必要条件知, 在临界点处有 $z'_x = z'_y = 0$. 因此, 临界点满足方程组 $\begin{cases} 4x + 2y - 2 = 0, \\ 2x + 2y - 2 = 0. \end{cases}$ 解

得 $x = 0, y = 1$, 故隐函数 $z = z(x, y)$ 的临界点为 $(0, 1)$. 将 $x = 0, y = 1$ 代入到方程 $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$ 中, 得 $z^2 - 4z + 3 = 0$, 解得 $z_1 = 1, z_2 = 3$. 下面分别讨论 $z(0, 1) = 1$ 和 $z(0, 1) = 3$ 的情形.

(i) $z(0, 1) = 1$ 的情形.

方程 $4x + 2z \cdot z'_x + 2y - 2 - 4z'_x = 0$ 两边对 x 求导, 得 $4 + 2(z'_x)^2 + 2z \cdot z''_{xx} - 4z''_{xx} = 0$, 解得 $z''_{xx} = \frac{(z'_x)^2 + 2}{2 - z}$.

方程 $4x + 2z \cdot z'_x + 2y - 2 - 4z'_x = 0$ 两边对 y 求导, 得 $2z'_y z'_x + 2z \cdot z''_{xy} + 2 - 4z''_{xy} = 0$, 解得 $z''_{xy} = \frac{z'_x z'_y + 1}{2 - z}$.

方程 $2y + 2z \cdot z'_y + 2x - 2 - 4z'_y = 0$ 两边对 y 求导, 得 $2 + 2(z'_y)^2 + 2z \cdot z''_{yy} - 4z''_{yy} = 0$, 解得 $z''_{yy} = \frac{(z'_y)^2 + 1}{2 - z}$.

由 $z(0, 1) = 1, z'_x(0, 1) = z'_y(0, 1) = 0$ 得 $z''_{xx}(0, 1) = 2, z''_{xy}(0, 1) = 1, z''_{yy}(0, 1) = 1$. 因此, 由黑塞矩阵 $H_z(0, 1) =$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > 0$ 知 1 为隐函数 $z = z(x, y)$ 的极小值.

(ii) $z(0, 1) = 3$ 的情形.

由 $z(0, 1) = 3, z'_x(0, 1) = z'_y(0, 1) = 0$ 得 $z''_{xx}(0, 1) = -2, z''_{xy}(0, 1) = -1, z''_{yy}(0, 1) = -1$. 因此, 由黑塞矩

阵 $H_z(0, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} < 0$ 知 3 为隐函数 $z = z(x, y)$ 的极大值. \square

得分	六、(10分) 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为二阶连续可微函数, 对任意 $X \in \mathbb{R}^n$, $H_f(X) - I_n$ 都是半正定对称矩阵, 其中 $H_f(X)$ 是 f 在 X 的黑塞矩阵, I_n 是 n 阶单位矩阵. 证明: $f(X)$ 在 \mathbb{R}^n 上有最小值.

证 对任意 $X \in \mathbb{R}^n$, 由泰勒公式得

$$f(X) = f(O) + \langle \nabla f(O), X \rangle + \frac{1}{2} X \cdot H_f(\theta X) \cdot X^T, \quad 0 < \theta < 1.$$

因为 $H_f(\theta X) - I_n$ 是半正定对称矩阵, 所以 $X \cdot [H_f(\theta X) - I_n] \cdot X^T \geq 0$. 由此即得

$$X \cdot H_f(\theta X) \cdot X^T \geq X \cdot X^T = |X|^2.$$

由柯西不等式知 $|\langle \nabla f(O), X \rangle| \leq |\nabla f(O)| \cdot |X|$, 于是有

$$f(X) \geq \frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla f(O)| \cdot |X| + f(O).$$

由此即知 $\lim_{|X| \rightarrow +\infty} f(X) = +\infty$. 因此, 对 $M = |f(O)| + 1 > 0$, 存在 $K > 0$, 当 $|X| > K$ 时, 就有 $f(X) > M$. 记 $D = \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X| \leq K\}$, 则 D 是有界闭集. 于是连续函数 f 在 D 上取得最大值和最小值. 设 $X_0 \in D$ 是 f 在 D 上的一个最小值点, 则 $f(X_0) \leq f(O) < M$. 因为当 $|X| > K$ 时, 就有 $f(X) > M$, 所以 $f(X_0)$ 就是 $f(X)$ 在 \mathbb{R}^n 上的最小值. \square