2023-2024 复变函数期末考试

1. 将函数 $\cos\dfrac{z-1}{z}$ 在 0 附近展开为 Laurent 级数

2. 写出函数 $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{1-z}}$ 在扩充复平面上的所有奇点，并判断类型（极点不需要判断阶数）

3. 计算

$$I=\int_{|z|=4}\frac{z^5}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2\right)}\mathrm{d}z \tag{1}$$

4. 设 Ω 为区域，$f\in H\left(\Omega\right)$ 且恒不为零，证明 $\ln\left|f\left(z\right)\right|$ 是调和函数

5. 设 $\mathbb{D}$ 为单位圆盘，$f\in H\left(\bar{\mathbb{D}}\right)$ 满足 $f\left(0\right)=1, f\left(1\right)=1$ 且 $f\left(\mathbb{D}\right)\subseteq\mathbb{D}$，证明 $\left|f'\left(1\right)\right|\geq 1$

6. 设 $D=\{z\in\mathbb{C}|\,|z|<1\}\setminus\{z\in\mathbb{R}|z\geq 0\}$，$f\left(z\right)=e^{iz}$，求区域 Ω 使得 $f\left(z\right)$ 是 Ω 到 D 的双全纯函数

7. 设 $f\left(z\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是整函数，证明：

   (1).

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(a_0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}(f\left(re^{i\theta}\right))\mathrm{d}\theta\\ a_n&=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(f\left(re^{i\theta}\right)\right)e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta\qquad\forall n\geq 1\end{aligned} \tag{2}$$

   (2). 若 $\mathrm{Re}f\left(z\right)\leq|z|^2$，证明 f 是一个次数不高于 2 次的多项式