

2023-2024 动力系统导论 1 期末考试 (B 卷)

回忆者: cbj

考试时间: 2024 年 1 月 9 日

题目 1, 2, 3, 4, 5 每题 8 分, 题目 6, 7, 8, 9 每题 15 分.

题目 1. 什么是回复点?

题目 2. 什么是共振单项式?

题目 3. 什么是 Diophantine 数? 它在标准型理论中起到了怎样的作用?

题目 4. 什么是符号动力系统? 简述它对于研究 Smale 马蹄的作用.

题目 5. 简述圆周映射的发展史 (回答对四点得满分).

题目 6. 设 f 是 X 到自身的同胚, $\Omega(f)$ 是 f 的非游荡集, 证明 $\Omega(f)$ 是不变集, 即

$$f(\Omega(f)) = \Omega(f).$$

题目 7. 设 (Σ_2, σ) 为双边符号动力系统, σ 为左平移映射. 证明对于 Σ_2 中任意两个非空开集 U 和 V , 都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

题目 8. 设 $f \in H^+(S^1)$, 即 f 为圆周上的保向自同胚. 设 f 的旋转数 $\rho(f)$ 是无理数. 证明以下两个命题等价:

- f 没有游荡区间.
- 存在 $h \in H^+(S^1)$, 使得 $f \circ h = h \circ R_{\rho(f)}$.

题目 9. 考虑方程
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + v(x, \varphi) \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases},$$
 其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, ω 为有理常值向量.

(1) 结合标准型理论, 证明其线性化同调方程为

$$\frac{\partial h}{\partial x} Ax - Ah(x, \varphi) + \left\langle \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \omega \right\rangle = v(x, \varphi) \quad (*)$$

(2) 假设 Diophantine 条件 $|\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s + i\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\gamma}{(|m|+|k|)^\tau}$ 成立, 其中 $\tau > n + d + 1$. 对于 $\rho > 0, h > 0$ 定义

$$B_{\rho, h} := \left\{ v(x, \varphi) = \sum_{k, m, s} v_{k, m, s} x^m e^{i\langle k, \varphi \rangle} e_s : \sum_{k, m, s} |v_{k, m, s}| \rho^m e^{|k|h} < \infty \right\}.$$

证明对于任意 $v \in B_{\rho, h}$, 同调方程 (*) 存在唯一解. 并给出解的估计.