2023-2024学年度点集拓扑学期末考试

1. 设 $\{\theta_i\}_{i\in I}$ 为集合 X 上的一族拓扑。证明 $\bigcap_{i\in I}\theta_i$ 仍是 X 上的拓扑。
2. 设 X 是拓扑空间，U 是 X 中开集，A 是 X 的稠子集。证明：$\overline{U\cap A}=\overline{U}$。
3. 设 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ 是连续映射。证明：若 $g\circ f$ 是商映射，则 g 是商映射。
4. 设 X 是拓扑空间，并且 $X=\bigcup_n A_n$。假设每个 A_n 都连通，并且对任意 n 都有 $A_n\cap A_{n+1}\neq\varnothing$。证明：$X$ 连通。
5. 设 X,Y 是两个局部紧空间。证明：乘积空间 $X\times Y$ 也是局部紧空间。
6. 证明：可分度量空间的任意子空间可分。
7. 证明：有理数集 $\mathbb{Q}$ 不能写成可数多个 $\mathbb{R}$ 中开集的交。
8. 设 X 为紧空间，$x\in X$，$U_1,U_2,\ldots$ 为 X 中一列递降开集，满足 $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{U_n}=\{x\}$。证明 $\{U_1,U_2,\ldots\}$ 是 x 的邻域基。
9. 设 X 是 T_3 空间，A 是 X 的无穷子集。证明：存在一列 X 中的开集 $U_1,U_2,\ldots$ 使得 $\overline{U_n}\cap\overline{U_m}=\varnothing$ 对任意 $n\neq m$ 成立，并且 $U_n\cap A\neq\varnothing$ 对任意 n 成立。
10. 考虑实数集 $\mathbb{R}$ 上子集族

$$\mathcal{B}=\{\{q\}:q\in\mathbb{Q}\}\cup\{(p,q):p,q\in\mathbb{Q},p<q\}.$$

    证明：

    (a) 存在 $\mathbb{R}$ 上唯一拓扑 θ 使得 $\mathcal{B}$ 是 θ 的一个基；

    (b) $\mathbb{R}$ 上以 $\mathcal{B}$ 为基生成的拓扑可完备度量化。