

2023-2024 学年高等代数与解析几何 2-1 期末测试

回忆:zwj

一. 计算 n 级行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

二. 求解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}.$$

三. 设 A 为 n 阶方阵, $\text{rank}(A) \leq k \leq n$. 证明: 存在 n 阶方阵 B , 使 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = k$ 且 $AB = 0$.

四. 证明: 对于 n 阶方阵 A , 若 $A^3 = E_n$, 则有 $\text{rank}(E_n + A + A^2) + \text{rank}(E_n - A) = n$.

五. 求经过直线 $\frac{x+2}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{5}$ 且与平面 $x - 4y - 8z + 12 = 0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

六. 证明直线 $L_1: \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ 与 $L_2: \begin{cases} x = 1 \\ 2y = z \end{cases}$ 是两条异面直线, 并求这两条直线的公垂线方程.

七. 设 α, β, γ, x 是空间中的向量, 证明:

$$(\alpha, \beta, \gamma)x = (\alpha \cdot x)\beta \times \gamma + (\beta \cdot x)\gamma \times \alpha + (\gamma \cdot x)\alpha \times \beta.$$