2023-2024 学年高等代数与解析几何 2-1 第一次月考

回忆:zwj

一.已知 $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$，$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$，求 $u(x)$，$v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

二.已知方程 $x^3+\sqrt[3]{7}x^2+2=0$ 的三个根为 x_1，x_2，x_3.求行列式 $\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_3} & \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} \end{vmatrix}$ 的值.

三.求行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^3 & x_1^2x_2 & \dots & x_1^2x_n \\ x_1x_2^2 & 1+x_2^3 & \dots & x_2^2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1x_n^2 & x_2x_n^2 & \dots & 1+x_n^3 \end{vmatrix}$ 的值.

四.计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

五.设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为非零多项式.若正整数 $n\geq 2$ 使得 $(f(x),g(x))=(f^n(x),g^n(x))$，证明: $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素.

六.已知 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+t_1 & a_{12}+t_2 & \dots & a_{1n}+t_n \\ a_{21}+t_1 & a_{22}+t_2 & \dots & a_{2n}+t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+t_1 & a_{n2}+t_2 & \dots & a_{nn}+t_n \end{vmatrix}=|A|+\sum_{j=1}^{n}t_j\sum_{i=1}^{n}A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 $|A|$ 中的代数余子式.

七.设 $f(x)=x^p+px+1$,其中 p 为奇素数, $g(x)=x^6+x^3+1$.证明: $(f(x),g(x))=1$.