2023-2024 学年高等代数与解析几何 2-1 第三次月考

回忆:zwj

一.求所有与 $A=\begin{pmatrix}1919 & 10\\ 0 & 17\end{pmatrix}$ 可交换的矩阵.

二.设 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.(1)求 A 的秩;(2)解矩阵方程 $AX=A+2X$.

三.设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵.证明:存在可逆方阵 P ,使 PA 的后 $m-r$ 行全为 0 .

四.设 A 为 n 阶方阵使得 $A^2=E_n$.证明: $rank\left(A+E_n\right)+rank\left(A-E_n\right)=n$.

五.设 C , $D\in\mathbb{P}^{n\times n}$,证明: $\begin{vmatrix}D & C\\ C & D\end{vmatrix}=\left|D+C\right|\left|D-C\right|$.

六.设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 为实矩阵,且满足:(i) $i\neq j$ 时, $a_{ij}\leq 0$;(2) $\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}>0$, $1\leq k\leq n$.证明: A^{-1} 的所有元素非负.

七.设 $D\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 且 D 可逆; α , $\beta\in\mathbb{P}^{n\times 1}$,且 $c=1+\beta^T D^{-1}\alpha\neq 0$.(1)证明:矩阵 $D+\alpha\beta^T$ 可逆;(2)试求矩阵 $D+\alpha\beta^T$ 的逆矩阵.