2023-2024学年度第二学期高等代数与解析几何第二次月考试题

1.(15分) 已知 $\epsilon_1=(1,0,0)^T,\epsilon_2=(0,1,0)^T,\epsilon_3=(0,0,1)^T,\eta_1=(2,2,3)^T,\eta_2=(1,-1,0)^T,\eta_3=(-1,2,1)^T$，若 $\mathcal{A}\eta_1=(4,2,3)^T,\mathcal{A}\eta_2=(1,1,0)^T,\mathcal{A}\eta_3=(-1,2,3)^T$，求 $\mathcal{A}$ 在 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 下的矩阵。

2.(15分) 已知 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\0&-1&0\\4&2&-3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}y&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$ 相似，

(1) 求 y 的值，

(2) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

3.(15分) 设 V 为复数域上的 n 维线性空间，σ,τ 为 V 上的线性变换，$\sigma\tau=\tau\sigma$，证明：σ, τ 至少有一个公共的特征向量。

4.(15分) 设 A_1,A_2,B_1,B_2 为 n 阶方阵，其中 A_2,B_2 可逆。证明：存在可逆阵 P,Q 使得 $PA_iQ=B_i,\ i=1,2$ 成立的充分必要条件是 $A_1A_2^{-1}$ 与 $B_1B_2^{-1}$ 相似。

5.(15分) $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，若 $\mathcal{A}^3=\mathcal{A}$，证明：$V=\mathcal{A}(V)\bigoplus\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{0})$。

6.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&\cdots&1+x_1y_n\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\cdots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\cdots&1+x_ny_n\end{pmatrix}$，其中 $n\geq3$，若所有 x_i, y_i, $i=1,\cdots,n$ 均同号，证明：A 的特征值均为实数。

7.(10分) 设 V 为复数域上的 n 维线性空间，$\mathcal{A}$ 为 V 的线性变换，证明：$\mathcal{A}$ 的任一不变子空间 V_1 都存在一个不变子空间 V_2 使得 $V=V_1\bigoplus V_2$ 的充分必要条件为 $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵为对角阵。