2023-2024第一学期数学类数学分析III期末试题

命题人：李佳傲

一、（20分）回答下列问题：

(1). 设级数$\Sigma_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。问$\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n|a_n|$是否收敛？如果收敛请证明，如果不收敛请给出反例。

(2). 设级数$\Sigma_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，$T_n=\Sigma_{k=1}^{n}|a_k|$. 问级数$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{T_n^{\frac{3}{2}}}$是否收敛？如果收敛请证明，如果不收敛请说明理由。

二、（20分）求下列级数的和：

(1).

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n-1)e^n} \tag{1}$$

(2).

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n} \tag{2}$$

三、（20分）问下列函数项级数是否在它们的收敛域内一致收敛，并说明理由：

(1).

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

(2).

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n} \tag{4}$$

四、（10分）证明函数项级数的Dini定理：设函数列$\{u_n(x)\}$在闭区间$[a,b]$上连续, 若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$逐点收敛到连续函数$S(x)$, 且对每个$x_0\in[a,b]$,数列$\{u_n(x_0)\}$都不变号, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛到$S(x)$.（注：若证明中用到了函数列的Dini定理，请给出函数列的Dini定理的证明。）

五、（10分）求e^x在$[-\pi,\pi]$上的Fourier级数，并据此计算$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+1}$.

六、（20分）求下列积分的值：

(1).

$$\int_1^2 \frac{x(x-1)(x-2)}{\ln(x-1)}\mathrm{d}x \tag{5}$$

(2).

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2x \ \mathrm{d}x \tag{6}$$

（附注：李老师在考前说考试范围的时候，说过会考16章的一个定理（但没有说是哪一个）的证明，所以才有了第四题。请选这门课的同学们不要认为这份题目的题型就是期末会考的，而要以李老师期末前说的考试范围为准。）