2023-2024第二学期伯苓班实变函数期末考试试卷

July 6, 2024

1. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续，证明： $sin(f(x))$ 也绝对连续.

2.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}dx$

3. $|f'(x)|\le M$ 且 $f(x)$ 绝对连续，证明： $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$

4. $f_n\Longrightarrow f$ 且 $f_n<f_{n+1}$ ，证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\,dx\le\int_E f\,dx$

5. a 是 $Lebesgue$ 点，有一列可测集合 $\{E_n\}$ 和一列趋于 0 的数 $\{r_n\}$ ， 存在 $\delta>0$ ，$E_n\subseteq(a-r_n,a+r_n)$ 且 $m(E_n)>\delta r_n$ ，求证： $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n}f(x)dx=f(a)$

6. $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，有 $(\int_a^b f(x)dx)^2\le(g(b)-g(a))(b-a)$ ，证明 $f^2\in L([0,1])$

7. $f(x)\in L([0,1])$ ，存在 $\delta>0$ ， f 在 $[0,\delta]$ 有界，证明
（1）对任意的 n 有 $f(x^n)\in L([0,1])$
（2）若 f 单调，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx=f(0)$

8. 对任意测度为 1 的的开集 G ，有 $\int_G f(x)dx=0$ ，证明： $f(x)=0\ a.e.$

注：本文档距考试后12天后编写，回忆者可能疏漏，仅供参考。