2023-2024 第二学期数学类实变函数期末考试试卷

授课老师：陈婷

（回忆者的注：题目顺序可能与原卷不同.）

1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}$. 若 E 被一个开集族 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 所覆盖，求证 E 被 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的一个可数子族所覆盖.

2. $\{E_n\}_{n\geqslant 1}$ 是可测集列. 求证 $m(\liminf\limits_{n\to\infty} E_n) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} m(E_n)$.

3. g 是 E 上几乎处处有限的可测函数. f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.
(1) 求证 $f\circ g$ 在 E 上可测. (2)$g\circ f$ 一定可测吗？说明理由.

4. $\{E_i\}_{i=1}^n$ 是 $[0,1]$ 中的 n 个可测集. 若 $[0,1]$ 中的每一点至少属于这 n 个集合中的 k 个，求证: 这些集合至少有一个的测度不小于 $\dfrac{k}{n}$.

5. $f\in L(\mathbb{R})$. 求证 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |f(x+n)|^2$ 几乎处处收敛.
(回忆者的注: 这里比作业题多了个平方.）

6. $f, f_k(k\geqslant 1)$ 是 E 上非负可积函数，且 $f_k(x)\to f(x)$,a.e., 以及 $\displaystyle\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \to \int_E f(x)\mathrm{d}x$. 求证对 E 的任一可测子集 e, 有 $\displaystyle\int_e f_k(x)\mathrm{d}x \to \int_e f(x)\mathrm{d}x$.

7. f_n 是 E 上一列可积函数, 满足:
(1)f_n 在 E 上依测度收敛于 f;
(2) 存在 $g\in L(E)$, 使得 $|f_n|\leqslant g, \forall n$.
求证 $f\in L(E)$ 且 $\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

8. f, g 在 $[a,b]$ 上有界变差. 求证 fg 在 $[a,b]$ 上有界变差.