2023-2024第二学期数学类概率论期末考试(A卷)

命题人：江一鸣

一、(14分)

(1)七位同学排队，问甲乙两人间恰好有2人的概率?

(2)两人相约7点到8点在某地会面，先到的人等待另一个人20分钟，过时就可以离去。求两人相遇的概率。

二、(14分)设随机变量$\xi \sim U([0,1])$.

(1)求$E\xi$和$D\xi$;

(2)若η和ξ独立同分布，求$\xi+\eta$的密度函数.

三、(14分)

(1)设(ξ,η)有联合密度函数

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1+xy}{4} & ,|x|<1,|y|<1\\ 0 & ,else\end{cases} \tag{1}$$

试证ξ,η不独立，但ξ^2,η^2独立;

(2)若随机变量X和X相互独立，证明存在常数$C\in\mathbb{R}$使得$P\{X=C\}=1$.

四、(14分) 设$\xi \sim P(\lambda)$为一条蚕的产卵数。

(1) 求ξ的母函数;

(2)设该蚕每个卵变为成虫的概率为p, 每个卵是否变为成虫彼此独立。设最后ξ个卵有η个变为了成虫。问η的数量分布?

五、(14分)设随机变量$\xi \sim N(0,1)$.

(1)求ξ的特征函数;

(2)设η和ξ独立同分布。求$U=\xi^2+\eta^2, V=\frac{\xi}{\eta}$的密度函数，并证明它们是独立的。

六、(14分)

(1). 证明：若随机变量列$\{\xi_n\}$依概率收敛到ξ, 那么$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$;

(2). 上一小问的逆命题成立吗？若成立请给出证明，不成立请给出反例。

七、(16分)

(1). 叙述分布函数弱收敛的定义;

(2). 证明海莱第一定理：任一一致有界的非降函数列$\{F_n(x)\}$中必有一子序列$\{F_{n_k}(x)\}$弱收敛于某一有界的非降函数$F(x)$.