随机过程期末试题 (mch 老师)

整理：lzk

1. 设 $N(t)$ 为速率 λ 的 Possion 过程，求解 $\mathbb{E}[N(t)\cdot N(t+s)]$

2. 设 $X_1,\cdots X_n$ 是 iid 的，且满足 $\mathbb{P}(X_i > x) = e^{-x}$, 并记 $M_n = \max_{1\le m\le n} X_m$, 求证:

(1)$\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{\log n} = 1 \quad$ a.s.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M_n}{\log n} = 1 \quad$ a.s.

3. 设 $\xi_1,\cdots \xi_n \overset{iid}{\sim} \xi$, 且满足 $\mathbb{P}(\xi=-1)=\mathbb{P}(\xi=1)=\frac{1}{2}$, 记 $S_n = S_0 + \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, 并设 $S_0=0$. 现在设 $T_1 = \min\{n : S_n = 1\}$, 求证 $\mathbb{E}[s^{T1}] = \frac{1-\sqrt{1-s^2}}{s}$

4. 设 $N_1(t), N_2(t)$ 为独立的，速率分别为 λ_1,λ_2 的 Possion 过程. 求证:

(1)$N_1(t)+N_2(t)$ 是速率为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Possion 过程.

(2) 对于 $N_1(t)+N_2(t)$ 而言，第一次发生来自 $N_1(t)$ 的概率为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$，并证明这一事件与时间无关.

5. 设 $X_1,\cdots X_n \overset{iid}{\sim} X$, 并记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$,$N(t) = \inf\{n : S_n > t\}$. 从而 $N(t)$ 为一个更新过程.

(1) 求证：$\mathbb{P}(X_{N(t)} > x) \ge \mathbb{P}(X > x), \forall x \ge 0$

(2) 若 X 的分布函数 $F(x) = 1-e^{-x}$, 试求出 $\mathbb{P}(X_{N(t)} > x)$ 的精确解析式.

(3) 利用关键更新定理求解 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}X_{N(t)}$

6. 设 $\{\xi_{i,m}\}$ 为一个分支过程, 且有 $\mu = \mathbb{E}\xi_{i,m} > 1, \sigma^2 = Var\xi_{i,m} < \infty$. 令 $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,k}$，如果 $Z_{n-1}\ne 0$. 设 $Z_0 = 0$, 并设 $X_n = \dfrac{Z_n}{\mu^n}$, 试证明 $X_n \to W \quad$ a.s., 并且也是在 L^2 意义下收敛的. 最后证明 $\mathbb{E}W = 1$