绝密 ★ 启用前

南开大学数学科学学院

泛函分析2024-2025期末测试卷

注意事项：

1. 命题人：李磊
2. 回忆人：xzqbear
3. 考试限时：100 分钟
4. 本次考试全英文命题.
5. 考试时间：2024 年 12 月 31 日

一、解答题

1. （15 分）

Let S be any non-empty set and E be a Banach space over $\mathbb{R}$. Let $C^b(S,E)$ be the vector space of bounded continuous functions from S to E with the norm

$$\|f\|_b = \sup_{s\in S} \|f(s)\|$$

. Show that $C^b(S,E)$ is a Banach space.

2. （15 分）

Let $M_n(\mathbb{R})$ be the space of all $\mathbb{R}^{n\times n}$ matrix. Define $\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$. Prove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is an inner product on $M_n(\mathbb{R})$.

3. （15 分）

Let $1\leqslant p<\infty$ and consider $T:\ell_p\to L^p[0,\infty)$ defined by

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n\chi_{[n-1,n)}, \forall x\in (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in \ell^p.$$

Prove that $\|Tx\|=\|x\|$ for any $x\in\ell^p$.

4. （15 分）

Let $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ be a continuous function and $T:L^2[a,b]\to L^2[0,1]$ defined by

$$Tf(x)=\varphi(x)\int_0^1 \varphi(t)f(t)\mathrm{d}t$$

Prove that T is self-adjoint and positive.

5. （15 分）

Consider Ω as a σ-finite measure space, and $y\in L^\infty(\Omega)$. Define T as a linear operator:

$$Tx(t)=y(t)x(t)$$

$x\in L^2(\Omega)$ and $t\in\Omega$ are arbitrary. Find adjoint operator T^* .

6. （15 分）

Suppose H is a Hilbert space, prove that linear operator T on H is self-adjoint if and only if $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

7. （10 分）

Let X be a normed space, and $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ with the property that

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty, \quad \forall\, x^* \in X^*.$$

Prove that

$$\sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty.$$