2024-2025 学年高等代数与解析几何 2-1 第一次月考

回忆：鸾喙

1. 求多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & x^2-2\\ 2 & x^2+1 & 2\end{vmatrix}$ 的根.

2. 求 x^m-1 和 x^n-1 的最大公因式,$m\geq n$.

3. 设 $f(x)$ 是首项为 1 的实系数多项式, 且无实数根. 求证:$f(x)$ 一定可以表示为两个实系数多项式的平方和.

4. 设 $f(x),g(x)$ 是 $\mathbb{P}[x]$ 上的两个多项式. 证明:$f(x)|g(x)$ 当且仅当 $f^2(x)|g^2(x)$.

5. 求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_1+\lambda_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ a_2 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & a_n & \cdots & a_n+\lambda_n\end{vmatrix},\quad \lambda_i\neq 0, i=1,2,\ldots,n.$$

6. 求证:

$$\begin{vmatrix}a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1\\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij},$$

这里 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

7. 求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n\\ 1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n\\ 1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n\end{vmatrix}.$$