2024春省身班动态进出考试常微分方程

一、 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 连续, 且对 $\forall x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, 都有

$$|2xf(x,y_1) - 2xf(x,y_2)| \leq |y_1 - y_2|$$

证明: 任意给定 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, 方程 $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ 的满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解唯一. (**方程解的存在性无需证明**)

二、 **可以直接使用的结论:**

对任意 n 阶实矩阵 A 及任意 $b > 0$, 存在 n 阶实矩阵 F 满足 $A^2 = e^{bF}$.

设 $b > 0$, $\Phi(t)$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ 的基解矩阵, 其中 $A(t)$ 为 n 阶实矩阵函数, 每个元素均为连续函数, 且 $A(t)$ 以 b 为周期. 证明: 存在实矩阵 F 及以 $2b$ 为周期的实矩阵函数 $P(t)$ 满足

$$\Phi(t) = P(t)e^{bF}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

三、 考虑以下非线性方程:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x+1}{4} - \frac{1}{4(x+1)^3}$$

$y = \phi(x)$ 为满足 $\phi(t) > -1, \forall t \in \mathbb{R}$ 的一个解.证明: $\phi(x)$ 为周期函数.

四、 证明: 第三题中的函数 $\phi(x)$ 的周期为 2π.